Étude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation

Raquel Isabel Barrera Curin

Université Paris Diderot

Thèse de doctorat

Spécialité : Didactique des Mathématiques

Raquel Isabel Barrera Curín

Étude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation

Thèse dirigée par MM. Alain Kuzniak et Laurent Vivier
Soutenue publiquement le mercredi 12 décembre 2012 devant le jury composé de

Mme	Isabelle	Bloch	Professeur émérite Université Montesquieu – Bordeaux IV	(Rapporteuse)
M.	Alain	Bronner	Professeur Université Montpellier 2	(Examinateur)
Mme	Iliada	Elia	Maître de conférence Université de Chypre	(Chercheuse invitée)
M.	Athanasios	Gagatsis	Professeur Université de Chypre	(Rapporteur)
M.	Alain	Kuzniak	Professeur Université Paris Diderot – Paris 7	(Directeur)
M.	Laurent	Vivier	Maître de conférence Université Paris Diderot – Paris 7	(Directeur)

Thèse préparée au Laboratoire de Didactique André Revuz, au sein de l'École Doctorale « Savoirs Scientifiques : Épistémologie, Histoire des Sciences et Didactique des Disciplines »

Remerciements

À mes parents, Abraham Barrera et Raquel Curín de m'avoir appris à aimer apprendre et développé en moi cette passion pour l'enseignement. Merci d'avoir accepté mon départ et de me faire toujours sentir que vous êtes avec moi.

À mon frère Abraham Barrera, ma sœur Paola Castillo, mon beau-frère Gabriel Mora, mon neveu Matías et ma nièce Francisca, qui m'ont soutenue à distance avec de l'amour transmis dans chacune de nos conversations.

À ma belle-mère Susan Halpert, car les conclusions de cette thèse ont vue la lumière dans ta cuisine juste à côté de tes bons gâteaux au *pumpkin* et au miel. À Alex Morgan, mon beau-père, pour le soutien que me donnait chaque bisou envoyé à la distance (et aussi les chocolats et le *maple syrup !*).

Merci à mes tantes Lidia Curín, Luisa et Margarita Barrera, pour tout le soutien que vous m'avez donné avant mon départ du Chili. Merci de vivre mes émotions comme si elles étaient les vôtres !

Merci à mon oncle Mauricio Barrera, ma tante Luisa Elmes et ma cousine Belén pour les mots de soutien qui, même à travers des années, n'ont jamais arrêté d'arriver.

À Domhnall Mitchell. Merci d'être, tout simplement, toujours présent.

À ma chère amie Zoé Mesnil, pour tout le temps que tu as consacré à travailler à côté de moi dans cette dernière ligne droite. Mais surtout, merci beaucoup de tous les moments partagés en dehors du travail, de ton soutien et de tes messages qui m'ont toujours fait sentir que même en étant loin, je n'étais jamais seule... Merci aussi d'avoir collaboré énormément pour que cette thèse devienne plus compréhensible ! Merci encore de prendre ma place en faisant les formalités que la distance m'empêchait d'affronter.

À Christophe Hache, mon grand ami, dans tous les sens que l'on peut donner à ce mot. C'était il y a plus de trois ans que je suis allée pleurer dans ton bureau pour ne pas avoir compris un examen de méthodologie : – je me suis trompée dans une bêtise ! – Oui. Mais ce n'est pas grave. Merci beaucoup de m'avoir soutenue avec tes mots simples, à l'écrit ou à l'oral, toujours appropriés et transparents.

À Marc Roger de Campagnolle, car dans cette thèse il y a beaucoup de toi, de tes conseils, de tes corrections, de tes commentaires, de tes réponses... Je n'en finirai jamais avec cette liste ! Merci mon cher ami de ta compagnie, je suis très heureuse d'avoir partagé pendant ces trois ans un bureau avec toi et d'avoir appris de ta solidarité et de la bonne volonté à partager tes connaissances avec nous tous. En pensant à toi je me suis dit un jour : je crois que Marc vient de l'astéroide B 612.

À mes chères Martine Lamy, Evelyne Scaron et Nadine Locufier. Merci de m'avoir donné votre temps pour répondre à mes questions, recevoir mes documents et m'orienter jusqu'à la dernière minute (et merci aussi pour le déjeuner surprise !). Vous êtes merveilleuses.

À Vincent Turquin, un grand merci pour ta gentillesse et pour avoir toujours la meilleure disposition de m'aider avec tout ce qui est informatique ! Je suis très contente d'avoir eu l'opportunité de te connaître un peu plus cette dernière année. Parler avec toi a toujours été un plaisir !

À Nicole Gillet, ma chère Nini... Pour ton cœur bienveillant et pour la sagesse d'accepter la vie telle qu'elle est. Pour m'avoir montré qui tu es le premier jour que nous nous sommes vues, quand deux étudiantes chiliennes n'arrivaient pas à s'inscrire à l'université. Elles n'avaient pas encore une carte bancaire mais tu as sorti tes chèques sans réfléchir deux secondes. Merci aussi de partager les déjeuners des thésards ! Et de nous laisser faire partie de ta vie. Merci pour nos conversations et pour avoir partagé autant des moments que je n'arriverai pas à décrire dans quelques lignes. Je pourrais tout de même en mentionner deux : nos soirées de dictées et les dîners en mangeant de la roquette *comme les gens qui font du cinéma !*.

À Jérôme Barberon. Le meilleur bibliochefeur du monde ! Non seulement pour trouver les articles et les bouquins les plus bizarres que l'on puisse te demander mais aussi pour faire de la bibliothèque de l'IREM un endroit unique ! Gracias amigo, en realidad esto es posible porque el único eres tú.

À Emmanuel Audusse (mon cher Manu !), Aurélie Chesnais et Guillaume ! Sans vous je n'aurais jamais trouvé un appartement si rapidement à Montpellier. Merci de votre confiance et de m'avoir fait gagner un temps précieux pour la rédaction de ma thèse pendant l'été.

À Katia Meziani, merci beaucoup car je n'ai même pas terminé de te dire quel était le problème avec ma bibliographie quand tu étais déjà installée à côté de moi avec une solution immédiate. C'est seulement dommage que je suis arrivée au 5B01 quand tu étais déjà partie. Merci beaucoup de revenir de temps en temps et de me permettre de connaître ton grand cœur dans les gestes le plus simples.

À Carolina Ruminot, ma chère Rumito, car il y a un peu plus de quatre ans tu as tenu ma main au décollage et à l'atterrissage des deux premiers avions que j'avais pris dans ma vie ! Merci car symboliquement tu as répété plusieurs fois le même geste : un mot, un abrazo tuyo et le ciel gris devenait bleu (même à Paris !).

À Julia Pilet, chère collègue et amie. Cela a été un grand plaisir de partager ces trois années avec toi : du travail, des vacances, des conférences, des dîners, des films, encore du travail, de l'organisation, de la désorganisation, des moments de folie et des moments de pause, de la galette des rois et du Saint Nectaire ! On devrait écrire un bouquin.

À Avenilde Romo, un grand merci chère amie pour tes conseils toujours pertinents. Merci aussi pour nos longues conversations et pour la poésie, les chansons et les réflexions que tu partageais avec moi et qui plusieurs fois étaient juste ce qu'il fallait pour continuer !

À Elizabeth Montoya, pour le soutien que tu m'as donné tout au début de ce projet et pour le courage que tu m'as transmis même à distance.

À tous ceux qui ont fait et qui font encore partie du *team* du 5C6 et du 5B01 avec qui j'ai partagé des moments inoubliables : mon cher Yann Strozecki ; Joseph Salmon, mi compañero ! ; Laura Fontanella, la più bella ! ; Luis Pinto, le plus beau ? ; Mes chers Rémy Strullu et Celia ; et Pablo Cubides, mi veci Pablito...

À Diana Violeta Solares et Claudia Leticia Cen Che. Merci mes chères amies pour les beaux moments que nous avons vécu à Paris et qui ne se sont jamais terminés car le monde parallèle de l'internet ne nous a jamais permis de nous éloigner. J'ai hâte de vous revoir !

À Michèle Artigue pour votre disposition à lire et à écouter tous mes questionnements. Merci beaucoup de nos conversations toujours très éclairantes et de grande richesse.

À Arturo Mena et Javier Lezama. Je serai toujours très reconnaissante et fière de vous avoir rencontrés ici. Vous êtes tous les deux un exemple de sagesse et d'humilité d'esprit.

À Rossana Falcade, merci beaucoup d'avoir la bonne volonté de relire mon travail et de dédier du temps à m'expliquer les notions de la TMS.

À Barbara Jaworski, John Mason et Maria Luiza Cestari. Merci d'avoir pris un moment de votre temps précieux pour m'écouter avec intérêt et pour en discuter de mon travail de thèse.

À Richard Mabry. Merci de partager vos idées avec moi, même sans me connaitre vous avez toujours eu la meilleure disposition de répondre à toutes mes questions et encore, comment pourrais-je oublier le jour quand le triangle "tatoo" représentant la somme de puissances d'un quart est arrivé chez moi !

Au groupe Mathmonde de l'IREM de Paris 7. Un grand merci à Nathalie Dechezleprêtre et à René Cori de m'avoir accueilli au sein d'un groupe très riche et original. Merci beaucoup de vous intéresser aux mathématiques du monde dans les langues du monde ! Cela été un vrai plaisir de travailler avec vous.

Aux membres du LDAR et surtout à tous ceux qui ont pris un moment pour me dire bonjour ou me souhaiter bon courage au cours de mon travail tout au long de cette période. J'ai un peu peur d'oublier quelqu'un, je vous dis donc merci à tous et à toutes !

À Sandrine Pellé, merci d'avoir eu toujours la disposition de répondre à mes questions personnellement, par mail ou par téléphone ! Merci aussi de m'avoir envoyé au bon moment les documents qui me permettaient de répondre aux demandes administratives propres à une étudiante étrangère.

Un grand merci à M. Pascal Chetini d'avoir toujours eu la meilleur disposition face à nos demandes de doctorants... Et encore plus : pour avoir signé avec la même patience les mille et une candidatures pour les postes d'ATER et aussi pour avoir sauvé plusieurs matinées de travail chaque fois que j'oubliais la clé de mon bureau !

Au groupe de Jeunes Chercheurs du LDAR, à tous ceux que je n'ai pas encore mentionnés, merci à Robin Bosdeveix, Luz Martínez, Lynn Farah, Soraya Bedja, Dominique Laval, Assia Nechache, Edith Petitfour, Cécile Allard, Nicolas Pelay, Eric Mounier, Joris Mithalal (à l'époque !), Katalin Gosztonyi et aussi à tous les étudiants étrangers qui en ont fait partie pendant un moment au cours de ces trois ans. On apprend vraiment beaucoup les uns des autres. Cela a été un grand plaisir de vous avoir rencontré dans ce processus.

Un grand merci aussi aux jeunes chercheurs de l'ARDM et en spécial à tous ceux qui ont travaillé en organisant nos séminaires et journées de travail toujours d'une grande qualité humaine et scientifique. Je ne vais même pas essayer de vous mentionner un par un car je risque d'en oublier certains, je suis sûre que vous me comprendrez : Merci donc à tous et à toutes !

À mes amies du monde extérieur, les filles ! Pour toutes les soirées de filles qui nous permettaient un petit moment de relax après le boulot, un grand merci à mes amies Maria Iribarne, Yukako Asai, Fátima Cignetti, Florcita Jaurena, Noelia Luque et Sandrita Mai.

Ma chère Lorenita Barrientos, un spécial merci à toi. Les détails sont au cœur de ta personne. Merci de me surprendre à plusieurs occasions et de ton soutien à des moments très significatifs : anniversaire, soutenance de master, veille du départ au Chili, retour de vacances... Merci aussi d'être en retard mais jamais trop pour qu'un nouvel an commence sans toi et ta bouteille de champagne !

À mon cher et même très cher ami Jonas Frey. Est-ce que tu te souviens de nos premières conversations en *franglais* ? Et des soirées consacrées à faire nos devoirs de français ! On était de bons étudiants n'est-ce pas ? Merci de ta compagnie, de ta préoccupation, de ta confiance, de nos promenades à la découverte de Paris : – et c'est quoi ça ? – Je ne sais pas ! *rires*. Bien sûr, merci de nos longues journées de travail à Chevaleret. Finalement, merci beaucoup de nous avoir donnés le cadeau merveilleux de rencontrer ta famille et de fêter un noël simplement inoubliable.

À Catherine Grau, merci de nos longues conversations et des dîners franco-russes les plus magnifiques que l'on peut avoir à Paris ! Merci de ta permanente préoccupation, de ton aide précieuse et de tes conseils pour surmonter les difficultés que la bureaucratie fait subir, des fois, les étudiants étrangers. Merci aussi à Katia et Alina pour les bons moments partagés (la plupart du temps chez Catherine !)

À Lilian Vazquez, la meilleure didacticienne de l'image que j'ai jamais connue ! C'est avec grand plaisir que j'ai participé à ton atelier de cinéma, c'était la pause juste au moment juste. Merci pour les beaux moments partagés pendant ces deux dernières années (junto a tí y a Romain también !).

À mes amies au Chili, Silvana Peña, Ana Maria Estrada y Camila Dubo. Merci de nos e-conversations, de votre préoccupation pour moi, de vos e-mails... Merci d'être si proches en étant si loin.

À mon cher ami Edwin Cárdenas, pour rester toujours en contact et pour avoir la phrase juste au moment précis : – Estoy un poco cansada... es uno de esos días en que quisiera ir a la casa de mi mamá a tomar once – Ay ! Pero tomemos un tecito, te acompaño.

À Nathalie Anwandter, Ximena Colipan et Pamela Reyes Santander, collègues et compatriotes. Quel grand plaisir c'était de travailler avec vous ! Et ce n'est pas encore fini, en fait,

on vient de commencer.

À Gina Luci, chère amie, j'ai encore la belle écharpe que tu as tricotée pour moi avant mon départ du Chili ! Merci beaucoup de ton énergie et de tes bons vœux.

À mes chers amis Giancarlo Lucchini et Carolina Canales, merci de votre disposition à répondre avec les meilleurs métaphores à toutes mes questions mathématiques multiples et infatigables ! Mais merci aussi pour le *dulce de leche de Bariloche* sans lequel la vie aurait sans doute été moins « sucrée » et donc moins heureuse ! Enfin, je suis vraiment fière de voir comment vous réussissez dans vos projets en étant toujours sensibles aux besoins des autres.

Je remercie énormément les membres de mon jury de thèse, M. Alain Bronner et Mme Iliada Elia, ainsi que mes rapporteurs, M. Athanasios Gagatsis et Mme Isabelle Bloch. Merci d'avoir accepté de lire, commenter et corriger ma thèse en faisant un travail très riche et minutieux même si le temps était, dans mon cas particulièrement, une contrainte major.

Un grand merci à mes directeurs de thèse, Alain Kuzniak et Laurent Vivier. Merci d'interpréter mes idées et de les rendre plus compréhensibles, merci de voir toujours plus loin et de m'apporter de bonnes idées et des réflexions profondes. Merci aussi de m'avoir donné de l'autonomie intellectuelle tout en exigeant que je sois claire et scientifiquement rigoureuse.

À mon maître, maître de maîtres, Jorge Soto-Andrade (PBCT – Conicyt ; CIAE – Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile). *O captain ! My captain !* Merci de croire en moi, de voir en moi un potentiel que moi même n'avais pas réalisé. Merci de m'apprendre qu'il y a toujours du temps, de répondre à toutes mes questions en faisant sortir de nouvelles ! Merci de ne jamais dire : ce n'est pas possible. Merci pour le fait que chaque visite à Paris signifiait un rendez-vous de travail (même autour d'un bon falafel !). Merci de toutes nos discussions qui ont sans doute enrichi mon travail de thèse et qui m'ont donné des perspectives de recherche.

À mes collègues, Eric Bonté, Nathalie Briant et Cyril Molléra. Merci de m'avoir accueillie à l'IUFM de Montpellier, de m'avoir intégrée dans votre groupe de travail, merci de m'avoir aidée énormément dans mes premiers pas en tant que formatrice de maîtres. Merci aussi au département de mathématiques et à l'administration, en particulier à M. Serge Valette et à Mme. Sandrine de la Cruz, pour votre disposition et bonne volonté d'arranger mes heures de cours pour je puisse terminer ma thèse à Paris. Merci aussi à l'équipe ERES, à sa directrice, Valérie Munier, et à tous les membres. Merci de m'avoir accueillie, m'avoir présenté vos travaux et même de m'avoir proposé une répétition de ma soutenance !

À tous les enseignants participant à cette recherche : Brigitte Benzekry, Chantal Rémy, Carine Sort, Brigitte Petitjean, Christine Cornet, Philippe Goldstein, Emmanuel Bernard, Rolande Rimokh, Catherine Staroswiecki, Estelle Peyragrosse et Pascale Bras. Merci beaucoup pour les heures de cours dédiées à mes expérimentations et encore plus de vos commentaires et suggestions qui m'ont permis de les enrichir : sans vous rien n'aurait été possible. Je vous serai toujours très reconnaissante ! Un spécial merci à Estelle Vancauwenberghe de votre disposition à participer à cette expérience. Malheureusement cela n'a pas été possible à cause des contraintes de temps.

À mon amour, Daniel... Merci de ta compagnie, de tes vacances sacrifiées pour rester proche de moi, de tes douces et sages invitations à *au moins faire une petite promenade dans le quartier....* Merci de ta patience, quelle patience ! Merci de tes relectures en anglais (et en français !). Mais surtout, merci de m'avoir donné ton sourire aux moments les plus difficiles et de me transmettre paix et courage quand je les nécessitais le plus.

Et merci à tous ceux qui, à cause du stress du moment, j'aurais pu oublier...

Gracias a la Vida, que me ha dado tanto... (Violeta Parra)

Table des matières

La source d'inspiration et un petit aperçu de notre recherche

> *"It must be admitted that the use of geometric intuition has no logical necessity in mathematics, and is often left out of the formal presentation of results. If one had to construct a mathematical brain, one would probably use resources more efficiently than creating a visual system. But the system is there already, it is used to great advantage by human mathematicians, and it gives a special flavor to human mathematics."* (Leinster, 2003, p.13)

Pouvons-nous imaginer l'enseignement de la géométrie sans la présence de constructions ? Pourrions-nous parler de figures en omettant des dessins ? Pouvons-nous parler de propriétés géométriques sans les visualiser ? En fait, oui. D'autant plus que la géométrie est en train de disparaître des programmes officiels ! Ce chemin nous conduit petit à petit à perdre cette essence ("*special flavor*") dont Ruelle a parlé. Il nous éloigne, peut-être inconsciemment, de ce langage visuel « universel et immémorial [...] qui précède le verbal dans l'expérience humaine » (Saint Martin, 2007, p.2) et qui est étroitement lié aux concepts de sens et de compréhension.

Abraham Arcavi, dans son article "The role of visual representation in the learning of mathematics", énonce différentes significations que des étudiants de mathématiques donnent à la visualisation en lui attribuant un rôle puissant dans les cas suivants :

> "Visualization as a support and illustration of essentially symbolic results (and possibly providing a proof in its own right); a possible way of resolving conflict between (correct) symbolic solutions and (incorrect) intuitions; as a way to help us re-engage with and recover conceptual underpinnings which may be easily bypassed by formal solution." (Arcavi, 2003, p.223-224)

Or, la prise en compte de ces éléments ainsi qu'une référence faite par Arcavi (2003) à la figure que Mabry (1999) a proposé comme représentation visuelle pour la somme d'une série de puissances d'un quart [1], nous a amenés il y a quatre ans, à commencer notre recherche.

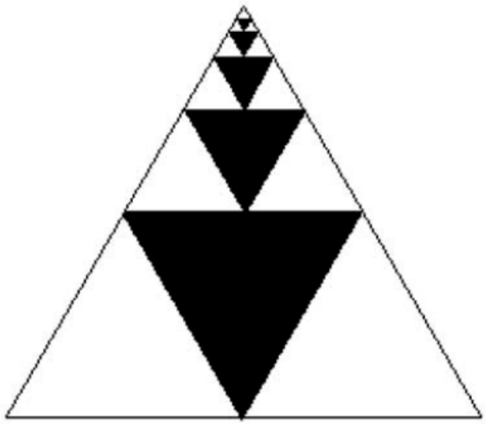


Figure 1 – Composition figurale proposée par Richard Mabry comme une représentation visuelle de la série correspondant à la somme de puissances d'un quart

Nous avons repris cette série et nous avons conçu une situation non-traditionnelle de réinvestissement de la multiplication, où, au milieu d'un travail collaboratif, des élèves d'une classe de Quatrième ont été confrontés à l'interprétation géométrique de la série à partir de la question suivante : *comment peut-on visualiser que cette assertion est correcte ?*

Les résultats obtenus (Barrera Curin, 2009) et l'analyse du travail des élèves nous ont motivés à approfondir notre étude de cette relation entre nombres et géométrie. Nous nous sommes concentrés sur la recherche de liens entre calcul et géométrie jusqu'à poursuivre, dans le cadre de cette thèse, la recherche d'un fil conducteur permettant d'établir des relations entre la multiplication et certaines de ses significations à travers la géométrie. De façon complémentaire, nous nous sommes intéressés à l'étude du travail mathématique des élèves dans un contexte de collaboration et de médiation sémiotique et sociale.

Ce travail a commencé dans une étude des travaux historiques, épistémologiques et didactiques portant sur ce sujet et a abouti à la conception et à la mise en place de nouvelles séances non traditionnelles d'apprentissage portant sur des significations géométriques de la multiplication pour des nombres rationnels, relatifs et complexes.

L'analyse du contexte d'apprentissage-enseignement de la multiplication au niveau des programmes officiels du secondaire, notamment là où des nouveaux nombres s'intègrent à

1. $(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \cdots \approx \frac{1}{3}$

l'enseignement, nous a permis de consolider nos propositions didactiques.

Une articulation théorique orientant l'analyse des résultats obtenus grâce à la mise en place de nos séances d'apprentissage, menées dans des collèges et lycées français, constitue une partie essentielle de notre travail. Cette articulation théorique porte principalement sur l'Espace de Travail Mathématique (ETM) et ses *genèses* (Kuzniak, 2004, 2012) ainsi que sur des éléments concernant la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) et la construction sociale de connaissances mathématiques (Radford, 2000, 2004 ; Sfard, 2008).

Finalement, nos résultats rendent compte de l'étude de *parcours* d'individus (groupes de travail. cf. Section 5.1.2) résultant des interactions produites entre des éléments épistémologiques et cognitifs constituant un Espace de Travail Mathématique. Celui-ci a été intégré à une conception socioconstructiviste de l'apprentissage, où le travail collaboratif et le rôle de l'enseignant dans le processus de médiation culturelle se sont avérés essentiels.

Chapitre 1

Introduction : la question de la géométrisation de la multiplication pour différents ensembles de nombres

1.1 Description de la problématique

L'étude de la multiplication et l'enjeu géométrique associé à ses significations dans les différents ensembles de nombres — rationnels, relatifs et complexes — constituent les composantes élémentaires de la problématique de cette recherche.

Un intérêt, d'abord centré dans l'existence des nombres et le contexte géométrique leur donnant une représentation plus ou moins concrète ou simplement visuelle, s'est élargi et s'est plus précisément concentré sur la construction du sens de la multiplication à travers la géométrie.

Ainsi, notre recherche se développe à partir du constat que la multiplication est un objet mathématique complexe (Conne & Lemoyne, 1999). D'un point de vue mathématico-épistémologique, cette complexité concerne les significations de la multiplication existantes dans un *contexte* particulier et qui peuvent être liées ou non à un ensemble de nombres déterminé. Un exemple intéressant que nous présentons par la suite porte sur certaines des significations de la multiplication que Davis et Simmt (2006) ont obtenu grâce à une combinaison d'explications, discussions et questionnements résultant d'un moment d'échange avec des enseignants :

> "Multiplication is [...] repeated addition: e.g., $2 \times 3 = 3 + 3$ or $2 + 2 + 2$; equal grouping: e.g., 2×3 can mean '2 groups of 3' ; number-line hopping: e.g., 2×3 can mean 'make 2 hops of length 3', or '3 hops of length 2'; [...] ratios and rates: e.g., 3 L at \$ $2/L$ costs \$ 6; array-generating: e.g., 2×3 gives you 2 rows of 3 columns ; area-producing: e.g., a 2 unit by 3 unit rectangle has an area of 6 $units^2$; dimension changing; number-line stretching or compressing: e.g., $2 \times 3 = 6$ can mean that '3 corresponds to 6 when a number-line is stretched by a factor of 2'." (Davis & Simmt, 2006, p. 301)

À la fin d'une longue discussion portant sur les représentations de la multiplication qu'ils venaient de constater, la seule conclusion possible a été la suivante : "the concept of multiplication was anything but transparent. [Multiplication] was some sort of complex conceptual blend" (Davis & Simmt, 2006, p.301).

De ce fait, nous allons directement nous référer à ce que cette complexité implique d'un point de vue didactico-cognitif : le processus de construction et de compréhension du concept par les élèves. Notre intérêt pour la compréhension des objets mathématiques est un élément clé tout au long de cette étude. Il faut dire immédiatement que nous ne sommes pas dans une situation privilégiée par rapport à notre interprétation de ce processus de compréhension, que nous voulons étudier en profondeur en l'associant directement au processus d'apprentissage-enseignement qui le permet. Nous sommes bien d'accord avec les réflexions de Sfard (2008) qui, en reprenant Mayer (1983) et Hiebert et Carpenter (1996), souligne qu'il n'est guère surprenant que les méthodes pour un enseignement significatif ne soient pas encore bien connus et que, donc, la plupart des professeurs de mathématiques doivent s'appuyer sur une ensemble d'intuitions sur la pensée quantitative (laquelle concerne l'importance du sens et du calcul). Les réflexions de James Hiebert et Thomas Carpenter concernant la complexité d'un apprentissage *avec compréhension* mettent en évidence la difficulté de la conception d'environnements d'apprentissage scolaire qui réussissent à promouvoir une telle compréhension (Sfard, 2008).

Néanmoins, ces constats ne veulent pas du tout dire que des études concernant la construction et la compréhension d'un objet mathématique ne peuvent exister. Au contraire, ces études sont encore nécessaires pour que nous puissions accéder à une reconceptualisation (Sfard, 2008) de ces éléments pour effectivement être en mesure de les traiter en réduisant les difficultés sous-jacentes à l'apprentissage des mathématiques.

Par rapport à la question de la géométrisation de la multiplication, il nous semble très important de mentionner et d'éclaircir tout au début de la présentation de cette recherche ce dont nous parlons quand nous faisons référence au concept de géométrisation. Vergnioux (2003) la décrit comme :

> « L'essence de la science galiléo-newtonienne : essayer dans un premier temps de réduire les phénomènes à la mesure et aux relations métriques. On définit un point par ses coordonnées spatiales, un corps par sa position dans l'espace. Dans un deuxième temps les mouvements sont décrits comme le résultat de systèmes de forces, la direction de ses forces et la résultante de leur composition. Expliquer, dans ce cas, consiste à écrire les équations qui décrivent les mouvements, et secondairement permettent de les prévoir. Derrière la géométrisation, l'algébrisation. » (Vergnioux, 2003, p. 33)

Compte tenu de ce qui précède, une association entre la géométrisation et la mathématisation nous semble pertinente, étant donné que toutes les deux correspondent, dans une certaine mesure, à des processus permettant le passage du réel à la représentation et/ou à l'abstraction mathématique :

> "To (re-)invent mathematical ideas and tools, to (re-)discover mathematical properties [...]. Horizontal mathematization has to do with establishing a relation between non-mathematical situations and mathematical ideas. (Metaphorically this is like building a bridge among the two). Vertical mathematization is an activity in which mathematical elements are put together, structured, organized, developed, etc. into other elements, often in a more abstract or formal form than the originals." (Hershkowitz, Parzysz, & Van Dor Molen, 1996, p. 177)

Pour nous, la géométrisation ne correspondra sans doute pas au passage d'une situation de la vie réelle ou quotidienne au formalisme mathématique mais au processus de mise en relation entre la géométrie et des objets mathématiques usuellement représentés dans un cadre mathématique non géométrique. De ce fait, nous associons cette mise en relation entre un objet mathématique et la prise en compte de son sens à travers la géométrie (cf. Sections 3.6.3 et 6.3) à un processus de mathématisation verticale. Jablonka et Gellert (2007), dans leur "Mathematisation-demathematisation", expriment certains aspects concernant la *mathématisation horizontale et verticale* à propos de son utilisation dans le champ de l'éducation mathématique. Dans la *curricular conception* énoncée par Treffers (1987, 1991) :

> "Horizontal and vertical mathematisation define mathematisation as a multistep activity for students aiming at the exploration of mathematical structures. The focus is in mathematics, not on the 'realistic' situations from the mathematisation is hoped to be derived." (Jablonka & Gellert, 2007, p. 4)

Nous sommes donc dans la mathématisation verticale de Treffers et dans l'enjeu géométrisation-algébrisation mentionné par Vergnioux : "the geometrization process, which combines geometric shapes and mathematical concepts, is central to mathematical understanding" (Kuzniak, 2012, p. 7). Ce processus, associé à une mathématisation verticale, se réfère à une construction qui permettra la création de mathématiques plus complexes et donc une plus grande utilisation des stratégies abstraites (Reins, s. d.).

Un autre aspect à préciser est le suivant : de quoi parlons-nous quand nous nous référons aux significations de la multiplication ? Les significations de la multiplication correspondent aux interprétations du produit (Brousseau, 1998) ; ainsi, parler de la signification géométrique du produit renvoie à ce que le produit représente en géométrie : le produit peut donc se rendre visible et interprétable.

De ce fait, la question principale intégrant les éléments de notre problématique est la suivante : **quel type de géométrisation de la multiplication trouve-t-on quand on se place dans différents ensembles de nombres et de quelle signification de la multiplication rend-elle compte ?**

En outre, plusieurs questions viennent à compléter le point de départ d'un questionnement beaucoup plus large et spécifique à notre sujet de recherche : quels sont les liens entre multiplication et géométrie ? Quels obstacles ont dû être surmontés pour valider la notion de multiplication au fur et à mesure que les nombres sont devenus de plus en plus complexes ? La multiplication trouve-t-elle du sens dans la géométrie pour différents ensembles de nombres dans l'histoire et/ou dans les mathématiques ? Est-il possible de trouver en géométrie un fil conducteur qui permette d'établir un lien entre différentes significations de la multiplication ? Et la question peut-être la plus élémentaire de toutes : pour quoi établir un lien entre multiplication et géométrie ?

Au fur et à mesure du déroulement de cette étude, nous allons répondre à chacune de ces questions. D'une part, elles nous conduisent à une étude des travaux historiques et épistémologiques portant sur la relation entre multiplication et géométrie et, d'autre part, elles nous donnent la possibilité de nous focaliser sur un travail plus spécifique dont vont encore émerger d'autres questions qui constitueront le corpus de questions de recherche de ce travail de thèse.

1.2 Développement et articulation des questions introductrices : présentation de l'idée directrice de notre étude

1.2.1 Pourquoi une entrée historico-épistémologique à la notion de multiplication et à ses liens avec la géométrie

S'intéresser à la notion de multiplication et à ses relations avec la géométrie dans l'histoire ainsi qu'aux études rendant compte d'une analyse épistémologique et didactique, c'est-à-dire d'une analyse portant sur cet objet mathématique visant la détermination des conditions de sa compréhension (Sierpinska, 1991), constitue le premier pas méthodologique pour le démarrage de cette recherche. Notamment, nous nous intéressons aux liens entre les significations de la multiplication et la géométrie qui ont été mentionnés ou construits dans l'histoire des mathématiques. De ce fait, ce sont bien des significations de la multiplication — dont nous parlons tout d'abord dans un sens plutôt naïf fondé sur leur reconnaissance dans des travaux didactiques précédents (Conne & Lemoyne, 1999 ; Davis & Simmt, 2006 ; Douady, 1986) —, et leur représentation en géométrie, que nous avons besoin de contextualiser et de consolider d'un point de vue historique et épistémologique.

Cette réflexion sur la construction historico-épistémologique d'un savoir mathématique nous amène sans doute à la rencontre d'obstacles intervenant dans la construction de ce savoir dont leur compréhension (et, pourquoi pas, leur incidence dans l'enseignement d'aujourd'hui) est notamment favorisée, selon Bachelard (1938), par cette étude épistémologique. De ce fait, notre intérêt lié aux obstacles dans la construction de la multiplication pour différents ensembles de nombres nous amène tout d'abord à les définir, c'est-à-dire à préciser de quoi nous parlons quand nous nous questionnons à ce propos.

Est déjà connue, en didactique des mathématiques, la référence aux obstacles de type épistémologique et de type didactique (Brousseau, 1998). Ici, nous n'avons pas une nouvelle définition de cette notion, nous nous situons donc dans la définition de Bachelard (1938) : « c'est dans l'acte même de connaître intimement qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles… On connaît contre une connaissance antérieure » (Bachelard, 1938, dans Brousseau, 1998, p.121). Cette connaissance a surmonté des difficultés pour se consolider : elle est née avec des significations particulières qui ont été reconstruites et qui ont évolué au cours de l'histoire. De ce fait, la connaissance du réel, ou plutôt de la réalité historique de notre objet mathématique, est bien essentielle étant donné que les connaissances mathématiques font partie d'une histoire qui mérite être prise en compte, avant toute proposition didactique, « comme un mode de questionnement sur les concepts de la didactique » (Barbin, 1997, p. 69).

Ainsi, ignorer le passé est à éviter puisque c'est précisément cette étude du réel qui nous donnera une évidence de ce qui est objectivement inévitable et pertinent ou, au contraire, à éviter dans le processus d'apprentissage et d'enseignement d'un objet mathématique :

> « L'idée de partir de zéro pour fonder et accroître son bien ne peut venir que dans des cultures de simple juxtaposition où un fait connu est immédiatement une richesse. Mais devant le mystère du réel, l'âme ne peut se faire, par décret, ingénue. Il est alors impossible de faire d'un seul coup table rase des connaissances usuelles. Face au réel, ce qu'on croit savoir clairement offusque ce qu'on devrait savoir. Quand il se présente à la culture scientifique, l'esprit n'est jamais jeune. Il est même très vieux, car il a l'âge de ses préjugés. Accéder à la science, c'est, spirituellement rajeunir, c'est accepter une mutation brusque qui doit contredire un passé. » (Bachelard, 1938, p. 16)

Pour nous, l'histoire a un rôle épistémologiquement nécessaire et intéressant étant donné que nos questions portent sur les significations d'un concept mathématique (Barbin, 1997), significations sur lesquelles nous nous posons des questions quant aux « conditions de [...] naissance et donc [de] changement » (Barbin, 1997, p. 67). De ce fait, nous situons notre étude dans une épistémologie de problématiques, comme le définit Bkouche (1997), c'est-à-dire que nous nous intéressons à une analyse historique de l'évolution d'un domaine de la connaissance, ce qui nous permettrait d'accéder à une meilleure signification du domaine en question. Nous sommes donc allés chercher dans l'histoire la compréhension d'un certain type de développement, les modes de développement de la relation entre géométrie et calcul et notamment les modes de développement d'une relation entre multiplication et géométrie (Bkouche, 1997).

1.2.2 Du lien entre multiplication et géométrie à la construction du sens d'un objet mathématique dans un espace de travail mathématique

Dilthey définissait la compréhension comme « le processus par lequel nous connaissons quelque chose de physique à l'aide de signes sensibles qui en sont la manifestation » (Dilthey, 1992, p. 320). Or, en sortant de l'encadrement d'une manifestation de « quelque chose de physique », le rôle que les représentations visuelles peuvent avoir en faveur de la compréhension d'un objet mathématique plutôt abstrait devient clair. Nous dirons qu'elles viennent jouer le rôle des « signes » qui vont représenter les concepts mathématiques, en permettant aux élèves de les *saisir* et de les *manipuler*, en *prouvant* leur vérité et leur sens (Barrera Curin, 2009).

Nous allons tout d'abord situer les représentations géométriques dans un cadre utilitaire dont nous avons besoin pour cette recherche. Nous commençons par leur attribuer le rôle de représentants, ou en termes sémiotiques, de signifiants d'un objet mathématique usuellement représenté dans un cadre numérique ou algébrique, étant donné son caractère calculatoire. La géométrie n'est pas seulement une représentation visuelle mais aussi un outil complexe qui permet l'existence de processus cognitifs favorisant différentes représentations des objets mathématiques (Duval, 1994) ainsi que la mise en évidence de certaines de leurs significations.

Pour nous, la géométrie joue le rôle d'une représentation sémiotique non discursive (Duval, 2006a) contenant les outils nécessaires « pour produire des nouvelles connaissances et pas seulement pour communiquer certaine représentation mentale » (Duval, 2006a, traduction, p. 104). D'après Duval, d'un point de vue épistémologique, il existe une différence élémentaire entre les objets mathématiques et ceux qui concernent le monde physique :

> "[The mathematical objects] are never accessible by perception or by instruments (microscopes, telescopes, measurement apparatus). The only way to have access to them and deal with them is using signs and semiotics representations." (Duval, 2006a, p. 107)

Cela dit, nous prenons en compte l'importance des représentations sémiotiques pour l'apprentissage d'objets mathématiques mais nous considérons aussi la complexité de cet enjeu entre différents registres de représentations étant donné le fait que, à l'intérieur d'une activité mathématique, « les objets mathématiques ne doivent pas être confondus avec les représentations utilisées » (Duval, 2006a, p. 107). Sur ce point, la géométrie assume un rôle encore plus complexe, mais c'est bien là que nous trouvons la force d'établir cette relation entre géométrie et multiplication. Nous visionnons des propositions didactiques où les représentations géométriques en jeu seront des compositions figurales ayant leurs propres définitions et interprétations mais qui vont en même temps porter des significations de la multiplication dont nous voudrions construire la connaissance. De ce fait, il existe une relation implicite entre multiplication et géométrie que nous avons intérêt à rendre explicite.

Dès les premiers pas dans cette recherche, nous avons pris conscience du fait que les représentations géométriques peuvent favoriser la mise en évidence des différentes significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un processus de visualisation complémentaire du registre numérique (Barrera Curin, 2011). Cette hypothèse a son support dans une autre affirmation provenant de nos recherches et de nos expériences mettant en relation directe les éléments de notre problématique : la multiplication trouve du sens en géométrie étant donnée sa place dans un contexte géométrique appelé transformation et qui est indépendant d'un ensemble de nombres particulier. Ainsi, notre point de départ est la considération du fait que la multiplication correspond à une transformation dans le plan pour des nombres de différents ensembles et, comme nous le verrons plus tard, notre étude se focalisera sur les nombres relatifs, rationnels et complexes. Cette affirmation est un indice de ce qui est l'idée directrice de la thèse ainsi qu'un aperçu de ce qui constituerait la réponse à notre première question de recherche : **un traitement géométrique de la multiplication par les transformations permettrait-il l'établissement d'un lien entre ses significations pour différents ensembles de nombres ?**

Finalement, le rapport entre un objet mathématique et la construction de son sens — plus spécifiquement, par rapport à notre recherche, les liens entre multiplication et la prise de conscience de ses significations à travers la géométrie — visent l'étude et l'analyse des manifestations cognitives de la part des élèves qui ne peuvent pas se produire sans la médiation d'un environnement d'enseignement conçu spécifiquement pour cet objectif. Ainsi, l'étude de la compréhension par les élèves de la géométrisation de la multiplication nous permettra d'étudier en profondeur la maîtrise qu'ils manifestent ou, au contraire, les obstacles qu'ils rencontrent dans un travail mathématique qui nécessite à la fois des changements de cadres mathématiques et des changements de registres de représentations sémiotiques. De ce fait, une étude préalable des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2012), nous a permis de déterminer la pertinence et la flexibilité d'une approche théorique qui rendrait compte de la complexité et de la richesse du travail mathématique des élèves. En effet, pour fonctionner, les ETM supposent une mise en réseau de deux niveaux, l'un cognitif et l'autre épistémologique. Cette mise en réseau s'appuie sur un certain nombre de genèses, notamment sémiotique, instrumentale ou discursive. Il faut souligner que le professeur a la charge de proposer un ETM idoine pour le travail mathématique de ses élèves et qu'il revient à ces derniers de se l'approprier. L'élaboration d'une partie expérimentale au collège et au lycée mise en place à la fin de cette étude sera davantage concernée par le deuxième aspect mentionné ci-dessus en intégrant notre méthodologie de sorte que nous puissions répondre à notre deuxième question de recherche : **peut-on identifier et différencier des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM personnel (ou approprié) des élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?**

La description et l'analyse de ces interactions seront faites sous le regard de différents approches théoriques qui concernent, d'une part, les travaux sur la notion d'Espace de Travail Mathématique de Kuzniak (2004, 2012) et, d'autre part, des approches théoriques complémentaires nous permettant d'étudier à l'intérieur d'un ETM la mise en relation de différents cadres mathématiques (Douady, 1986), l'intervention de différents registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 2008) et le processus de médiation sémiotique favorisant une genèse sémiotique qui mettra en relation les composantes du plan épistémologique et du plan cognitif de l'ETM (cf. Chapitre 4). Par rapport à cette dernière approche théorique, nous ferons particulièrement référence à certains travaux de Bartolini Bussi et Mariotti (2008) concernant la Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS), ainsi qu'aux travaux de Radford (2000, 2004) et Sfard (2008) portant sur certaines réflexions associées à la construction sociale des connaissances mathématiques et à la complexité du processus de compréhension d'un objet mathématique.

Chapitre 2

La place des représentations géométriques dans le calcul numérique : mise en évidence de significations géométriques de la multiplication

2.1 Introduction : de la représentation géométrique des nombres à la géométrisation de la multiplication

Sans oublier que la détermination d'un lien entre multiplication et géométrie constitue le sujet central de notre recherche, nous avons commencé cette étude par un sujet beaucoup plus large mais essentiel : les nombres, notamment leurs représentations et leur rapport avec la géométrie. Ceci puisque nous partageons l'idée que, « en mathématiques, le retour au monde concret, puis à la géométrie, permet d'accéder à l'intelligence du monde symbolique » (Bruter, 2000, p. 7). Un monde complexe, étant donné qu'il n'existe pas comme le monde physique existe. Un monde auquel nous n'avons accès qu'à travers des représentations (Duval, 2006a), dont certaines se sont développées pour une raison aussi bien élémentaire que nécessaire : « faire progresser les connaissances sur les nombres » (Douady, 1986, p. 1).

Notre intérêt aux travaux historico-épistémologiques et didactiques, portant sur les liens entre des représentations géométriques et calcul numérique, enrichit une analyse didactique actuelle des processus mettant en relation la multiplication et certaines de ses significations à travers la géométrie. De ce fait, l'acceptation d'une mise en relation entre ces deux analyses permettrait, d'une part, que les objets mathématiques en jeu se déprennent de leur simplicité (Artigue & Robinet, 1982) et, d'autre part, que la construction de futurs processus d'enseignement favorise l'acquisition de significations dont nous parlons tout au début de ce travail.

2.2 Les nombres : des représentants représentés

Quand apparaissent les représentations géométriques des nombres ? L'origine des nombres, en suivant l'ouvrage de Georges Ifrah, nous amène à un long voyage dans l'histoire des chiffres où les nombres sont, à l'origine, des représentations de la réalité. Sa question, « Quête du Nombre ? Ou quête d'une Ombre ? » (Ifrah, 2003, p. 4) nous révèle le constat d'une conception ambiguë de cet être élémentaire des mathématiques. La connaissance essentielle du nombre ne consiste pas en un acte conscient de la compréhension de sa nature. L'essentiel de son existence est sa présence :

> « Ces nombres ne sont que des représentations et n'existent jamais indépendamment des choses qu'elles représentent ; les caractères qui les désignent ne leur donnent point de réalité, il leur faut un sujet, ou plutôt un assemblage de sujets à représenter, pour que leur existence soit possible ; j'entends leur existence intelligible, car ils n'en peuvent avoir de réelle. » (Newton, 1740, p.9)

Ainsi, en commençant par des représentations des quantités de la vie réelle avec les outils que la nature même mettait à disposition, l'homme courant, sans plus de réflexions mathématiques, comptait. Mais, un jour, les objets simples et ordinaires ont été remplacés par d'autres objets de forme conventionnelle et de différentes tailles. La forme et la dimension de ces nouveaux objets symbolisaient les différents ordres d'un système de numération : « un bâtonnet pour symboliser l'unité simple, une bille pour la dizaine, une sphère pour symboliser la centaine, et ainsi de suite » (Ifrah, 2003, p. 11).

Au quatrième millénaire avant Jésus-Christ, ces représentations appelées nombres avaient leurs propres représentants. L'homme avait déjà à sa disposition les moyens pour effectuer des opérations arithmétiques (Ifrah, 2003) ainsi que des représentations pour compter des durées, ce que nous pourrions interpréter aujourd'hui comme un premier pas vers la représentation géométrique d'une droite graduée (cf. Figure 2.1).

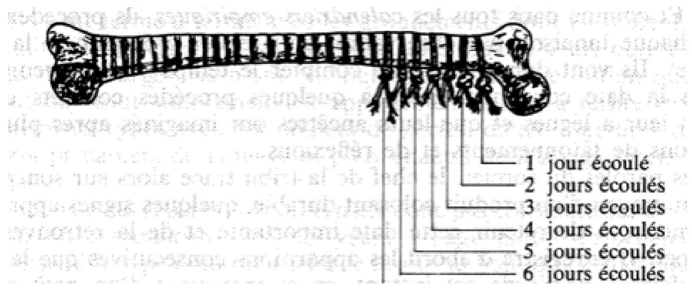


Figure 2.1 – Un rapport visuel entre nombres et géométrie

Or, dès que les nombres se sont représentés, c'est-à-dire dès qu'une notation numérique s'est établie, l'abstraction représentationnelle des nombres et la complexité de son interprétation se sont mises en évidence :

> « Une notation numérique est un système très particulier de communication humaine au moyen de signes conventionnels, à sens bien défini et représentant un langage numérique, ces signes (appelés des chiffres) étant tels qu'ils soient en mesure d'être émis et reçus, qu'ils soient également compris par les deux interlocuteurs et qu'ils soient associés aux termes successifs de la suite des nombres entiers naturels selon une structure mentale régie à la fois par le *principe de la récurrence* et par le *principe de la base*. » (Ifrah, 2003, p. 395)

Ainsi, petit à petit, différentes formes de calcul générées et développées à l'intérieur de différents systèmes de numération prennent place dans l'histoire mais nous n'allons pas approfondir davantage quant à leur développement historique. Néanmoins, ces références constituent pour nous un point d'entrée pour ce qui sera l'aspect central de notre section suivante : les premières interventions de la géométrie dans l'histoire du calcul.

2.3 Nombres, calcul et géométrie : le rôle de la géométrie dans la construction de sens

2.3.1 La géométrie dans les origines de l'arithmétique

Dans son étude sur l'histoire des chiffres, George Ifrah souligne la mise en évidence de l'intelligence humaine au fur et à mesure que l'écriture et le calcul, étroitement liés, se développaient. Pour nous, il est très intéressant d'inclure dans ce développement la présence de la géométrie et sa place dans l'histoire des nombres, notamment dans des références au calcul géométrique des Babyloniens, Égyptiens, Grecs et Chinois où « l'idée de mesure lie [...] figures et nombres, en transformant les unes et les autres » (Kellert, 2006, p. xii).

L'œuvre d'Ifrah nous permet d'accéder à une vaste information associée à la relation entre nombres et géométrie en nous donnant la possibilité de constater que ce calcul géométrique a mis en évidence des relations entre le numérique et « des concepts algébriques élémentaires » (Ifrah, 2003, p. 453).

Ainsi, à travers un long voyage historique, Ifrah nous a rapprochés de certaines étapes significatives et marquantes associées au développement historique de la géométrie, développement qui est, bien sûr, beaucoup plus complexe : – les nombres figurés (Pythagore et les pythagoriciens, V^e^ siècle avant Jésus-Christ) ; – les réponses calculatoires justifiant l'existence géométrique de π ou de $\sqrt{2}$ (Pythagore et les pythagoriciens) ; – les fondements de la géométrie classique d'Euclide (III^e^ siècle avant Jésus-Christ) ; – l'élimination dans l'arithmétique et l'algèbre des Arabes des représentations d'ordre géométrique (fin du X^e^ siècle) ; – la géométrie analytique de Descartes (1637) ; – la question de l'adoption universelle du système métrique et les définitions de géométries non euclidiennes (Lobatchevski, Bolyai, Riemann, 1829-1854) ; – l'inclusion du système métrique en tant que contenu obligatoire dans l'enseignement public français (1840) ; – les premiers éléments du calcul vectoriel (Hamilton, 1843-1844) ; et aussi à la publication des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire (Hilbert, 1899) (Ifrah, 2003).

Compte tenu de ce qui précède, notre recherche d'un lien entre géométrie, nombres et calcul aux origines de leur existence devrait remonter au temps des pythagoriciens et à celui d'Euclide, où il n'existait que des nombres naturels et des nombres fractionnaires, ces derniers existant seulement à travers les proportions. Dans cette recherche, nous nous intéressons spécialement à l'aspect fonctionnel du nombre naturel, notamment à l'extension de sa propriété sémantique et fonctionnelle (Bruter, 2000) :

> « Le nombre existentiel accède alors à un nouveau statut, celui d'une *grandeur* disaient les Grecs, d'une *quantité* a-t-on écrit plus tard, comme Descartes et Gauss par exemple. » (Bruter, 2000, p. 35)

De cette façon, nous introduisons notre section suivante, où la relation entre calcul et géométrie portera principalement sur les liens historiques entre calcul et grandeur.

2.3.2 Grandeurs et calcul

Charles René Reyneau introduit le concept de grandeur de la façon suivante :

> « On comprend sous le nom des *Mathématiques* toutes les Sciences qui ont pour objet les rapport des grandeurs. On appelle *Grandeur* tout ce qui est capable du plus et moins, c'est-à-dire d'augmentation et de diminution, tout ce qui pouvant être comparé à d'autres choses de même nature peut leur être égal, ou inégal, c'est-à-dire, plus grand ou plus petit, et qu'on peut leur égaler, quand il leur est inégal, en le diminuant de ce qu'il a de surplus, s'il est plus grand ; ou en l'augmentant de ce qui lui manque, s'il est plus petit. Ainsi tout ce qui a des parties est une grandeur. » (Reyneau, 1739, p. 3)

Plus tard, il définit les *Sciences Mathématiques Générales* comme celles qui « donnent la connaissance de tous les rapports qui peuvent se trouver entre toutes les grandeurs prises en général, et qui apprennent les méthodes de développer ces rapports, de les comparer les uns avec les autres de toutes les manières possibles » (Reyneau, 1739, p. xiv). Mais ce n'est que le début puisqu'il va encore distinguer ces Sciences Générales en faisant une référence aux trois manières dont elles expriment les grandeurs : – la Géométrie, à travers des lignes et figures ; – l'Arithmétique, par l'expression de nombres (idée d'unité appliquée aux grandeurs particulières et sensibles, les nombres entiers, les fractions, les rapports incommensurables ou même les grandeurs incommensurables) ; – l'Algèbre, par les lettres de l'alphabet (la manière la plus générale de toutes) (Reyneau, 1739).

La Géométrie, Science Mathématique Générale, a pour objet la représentation de toutes les grandeurs, et même s'il paraît qu'elle a pour objet particulier les rapports des trois dimensions du corps, des longueurs, des surfaces et des solides, elle peut aussi exprimer toutes les grandeurs particulières et sensibles, en les contenant « éminemment » (Reyneau, 1739, p. xviii). Par contre, ce sont l'Arithmétique et l'Algèbre qui constituent la *Science du Calcul des Grandeurs* puisque, permettant de faire des opérations semblables, elles ont une liaison naturelle. La Science du Calcul des Grandeurs contient les Éléments et elle comprend toutes les mathématiques.

Pourrait-on dire que c'est ainsi que commence la divergence entre le calcul et le visuel ? En fait, non. Nous dirions que ceci n'est qu'une vision précédente de ce que Bachelard a appelé plus tard la formation de l'esprit scientifique : « sur toutes les questions, pour tous les phénomènes, il faut passer d'abord de l'image à la forme géométrique, puis de la forme géométrique à la forme abstraite, poursuivre la voie psychologique normale de la pensé scientifique » (Bachelard, 1938, p.10). C'est un exemple de l'origine des recherches de la vérité dans les perceptions, là où nous pouvons voir qu'« un nombre entier est celui qui contient exactement l'unité plusieurs fois » (Reyneau, 1739, p. xxvi) et c'est un voyage vers l'acquisition d'un *jugement* (quand c'est l'esprit qui juge un rapport comme vrai) jusqu'au développement du raisonnement.

En suivant l'œuvre de Reyneau, nous avons beaucoup de références qui nous parlent de la richesse du calcul littéral et numérique, sans nécessairement parler d'un lien explicite entre calcul et géométrie. Nous voyons ainsi que ce n'est pas par hasard si, aujourd'hui, le calcul renvoie toujours au numérique. Par contre, nous partageons son assertion de ne pas permettre un calcul aveugle,

> « comme des artisans qui suivent des Règles dont ils ne savent pas les raisons [...] ; [ceux qui veulent apprendre les Mathématiques] doivent connaître en même temps les raisons sur lesquelles est fondé le calcul. [...] [Ils doivent voir clairement] que ces calculs étant appliqués aux figures de la Géométrie, représentent les rapports qui sont entre les lignes contenues dans ces figures, ceux qui sont entre les parties de ces figures comparées entre elles ou avec les figures entières dont elles sont les parties. » (Reyneau, 1739, p. lii)

La place des grandeurs dans la construction des mathématiques a été très importante, intervenant aussi bien dans la réalité sensible que dans la démonstration mathématique. Dans les *Éléments* d'Euclide (Vitrac, 1994), les règles générales d'argumentation sur les grandeurs ou, en d'autres termes, sur les choses, se fondent sur des propriétés correspondant à une évidence visuelle ou sensible : « on peut dire que le discours démonstratif euclidien s'appuie sur une axiomatique qui fait appel à une forme de connaissance empirique des objets et qui a un ancrage physique » (Bkouche, 2009, p. 6). Les exemples trouvés dans l'histoire et qui mettent en relation calcul et géométrie rendent compte de l'importance des grandeurs géométriques mesurées (Bkouche, 2009b) auxquelles on associe une évolution des connaissances comme les notions de proportionnalité et de linéarité ainsi que la construction d'une

> « théorie de grandeurs indépendante de la mesure, inaugurant ce que l'on appelle aujourd'hui un calcul géométrique dont on trouve un développement dans les *Éléments* d'Euclide. C'est cet héritage grec que l'on retrouve avec l'invention de ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrie analytique. » (Bkouche, 2009b, p. ix)

En suivant l'œuvre de Bkouche, nous avons, de manière générale, la progression suivante rendant compte de cette évolution de connaissances ayant leurs origines dans les géométriques mesurées : – les problèmes de construction chez les géomètres grecs ; – les déterminations d'intersection de courbes ; – les problèmes grammiques ; – l'introduction du calcul littéral qui permettra de représenter les courbes par des équations ; – le calcul littéral mis au point par Viète ; – la réécriture du calcul géométrique grec via le calcul littéral de Viète ; – la définition de la notion d'équation d'une courbe par Descartes et Fermat, c'est-à-dire l'algébrisation de la géométrie ; – la géométrisation de l'étude des équations (Umar Al-Khayyan) ; – les travaux de Descartes et de Fermat relevant du calcul géométrique portant sur des longueurs ; – le choix d'une unité par Descartes mettant l'accent sur l'analogie entre le calcul sur les longueurs et le calcul numérique ; – la conservation de la loi des homogènes dont Viète avait fait l'un des principes du calcul, par Fermat ; – les nombres, qui restent des mesures jusqu'au développement de la géométrie projective ; – et, finalement, le double caractère de la géométrie. D'une part, la géométrie est définie comme une

> « science autonome, née de considérations d'espace [qui] se sert de notions fondamentales (point, ligne droite, etc) et s'appuie sur une série de propositions ou postulats tirés de notre perception [...] soumis ensuite à une abstraction qui a aussi pour effet de leur donner une forme plus précise. » (Fano & Carrus, 2007)

D'autre part, la géométrie analytique est caractérisée « comme une reformulation de notions numériques » (Bkouche, 2009b).

Contrairement au dernier caractère de la géométrie mentionné ci-dessus, l'origine de la relation entre géométrie et calcul est racontée par l'histoire que nous venons d'évoquer. Nous reprenons donc la phrase de Rudolf Bkouche lorsqu'il dit que « le calcul littéral a été inventé pour le calcul des grandeurs » (Bkouche, 2009b, p. xi). En suivant certains faits historiques dont Bkouche rend compte, nous voyons qu'encore plus tard même Leibniz « a cherché désespérément un calcul géométrique, c'est-à-dire portant directement sur les objets géométriques, ensuite Poncelet et les géomètres projectifs du XIXe siècle » (Bkouche, 2009b, p. xii).

Nous nous sommes ainsi dirigés vers une recherche historique encore plus spécifique et nous sommes notamment concentrés sur les relations entre calcul arithmétique et géométrie jusqu'à ce que le calcul des grandeurs ait effectivement été représenté visuellement, particulièrement d'une façon géométrique.

Un exemple mentionné par Bkouche et que nous sommes allés chercher dans l'*Hitoire d'algorithmes* (Chabert et al., 1994) nous semble approprié puisque, comme nous l'avions déjà dit, nous sommes à la recherche de relations explicites entre calcul et représentations géométriques. Cet exemple semble être le premier qui « se plaçant dans la ligne démonstrative euclidienne assure un fondement géométrique à une méthode de double fausse position [...]. Il justifie la 'formule' $\frac{x'e''-x''e'}{e''-e'}$ par la considération de diverses surfaces » (Chabert et al., 1994, p. 113).

> « La démonstration [proposé par Qusta ibn Laqa] est donc de nature géométrique. Elle repose sur la proposition 43 du livre I des *Éléments* d'Euclide et elle se trouve à la croisée de deux traditions [...] : Le calcul arithmétique (au sens logistique) qui travaille par des règles et qu'on enseigne par des "exemples" ; la géométrie déductive grecque, ici appliquée aux aires, qui procède par le raisonnement. » (Bkouche, 2009b, p. 8)

Plus tard, l'algèbre indépendante de représentations géométriques a bien pris sa place dans les exposés concernant les problèmes du premier degré (Bkouche, 2009b) mais nous n'allons pas approfondir cet aspect pour le moment.

Puisque notre intérêt porte sur les origines du lien entre géométrie et calcul, il nous semble intéressant de préciser que le point de départ de cette histoire se trouve dans l'Égypte ancienne, comme le signale Hérodote :

> « Ce roi, m'ont dit les prêtres, partagea la terre entre tous les égyptiens par lots carrés d'égale superficie ; il assura par là ses revenus, en imposant à leurs possesseurs une redevance annuelle. Tout homme à qui le fleuve enlevait une parcelle de son lot allait signaler la chose au roi ; Sesostris envoyait alors des gens inspecter le terrain et mesurer la diminution, pour accorder dorénavant à l'homme une réduction proportionnelle de sa redevance. Voilà, je pense, l'origine de la géométrie qui passa plus tard en Grèce. » (Herodote, 109, p. 183)

Un exemple fondamental de la Grèce ancienne qui rend clairement compte de cette relation entre le numérique et le géométrique est le théorème de Thalès. En suivant l'œuvre de Bkouche (1994), nous avons une preuve de cela :

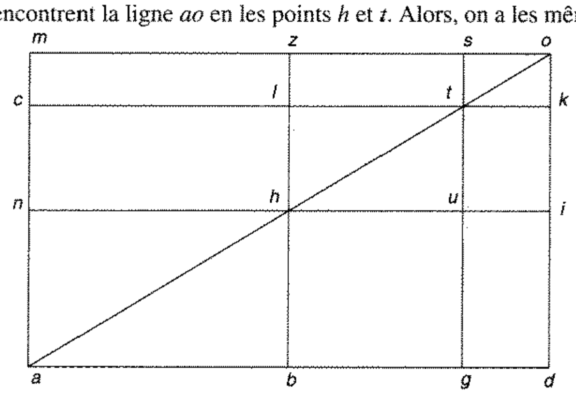
> « Le théorème de Thalès (ou théorème de lignes proportionnelles) énonce des conditions de proportionnalité de segments ; en cela il est au cœur de la relation entre géométrique et numérique, que ce soit à travers la mesure ou que ce soit avec la méthode des coordonnées et la géométrie analytique. » (Bkouche, 1994, p. 1)

Proposition trouvant son origine dans la vie réelle via des rapports de mesures, ce théorème possède trois types principaux d'énoncés : les rapports d'abscisses, de projection et d'homothétie (Brousseau, 1995). Ainsi, nous sommes face à un théorème qui a évolué à travers le

Le texte de Qusṭā ibn Lūqā

D'après «Die Abhandlung Qusṭā ben Lūqās und zwei andere Anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angenommenen Zahl» de H. Suter, *Bibliotheca mathematica*, 9 (1908) (pp. 111- 122). Traduction Caroline Dulac-Fahrenkrug.

Dans ce qui précède, nous avons expliqué comment à l'aide de cette méthode, on peut résoudre les problèmes de calcul dans lesquels n'interviennent pas de racines. Mais, maintenant, nous voulons prouver, par la voie géométrique, tout ce qui a été évoqué sur l'application de cette règle et l'expliciter à l'aide de figures.
Dans ce but, nous traçons d'abord une ligne droite de longueur indéterminée ; elle représente le nombre cherché. Soit *ad* cette ligne et soit *od* le résultat de la ligne supposée [c'est-à-dire ce qu'on obtient en faisant les opérations indiquées avec le *x*] que nous élevons perpendiculairement en *d* au-dessus de *d*. Ensuite, nous traçons *ao*. Maintenant, si nous voulons connaître le nombre cherché, qui est la ligne *ad*, nous devons examiner [le problème] avec deux nombres différents ; les nombres peuvent être ou plus petits ou plus grands, ou l'un plus grand et l'autre plus petit que le nombre cherché, comme nous l'avons déjà distingué plus haut.
Tout d'abord, que les deux soient plus petits que l'inconnue et qu'ils soient représentés par les lignes *ab* et *ag*. Nous élevons en *b* et *g* deux verticales qui rencontrent la ligne *ao* en les points *h* et *t*. Alors, on a les mêmes rapports :



$$\frac{ad}{do} = \frac{ag}{gt} = \frac{ab}{bh}$$

et *bh* est le résultat de *ab* et *gt* est le résultat de *ag*. Nous complétons maintenant le rectangle *md* et nous traçons par les points *h* et *t* les parallèles *ni* et *ck* à *ad*. Prolongeons *bh* et *gt* jusqu'à *z* et *s*. Maintenant, le premier nombre supposé *ab* est connu, ainsi que son résultat *bh*, et son erreur par rapport au résultat donné [*od*] est *hz* et est aussi connue. Le deuxième nombre supposé *ag* est également connu, ainsi que son résultat *gt* et son erreur *ts*. Multiplions l'erreur du premier nombre par le deuxième nombre ; nous obtenons le rectangle *mu*. Et, si nous multiplions l'erreur du deuxième nombre par le premier nombre nous obtenons le rectangle *ml*. Et, si nous soustrayons le petit rectangle *ml* du grand rectangle *mu*, il reste le gnomon *nuszlc*. Comme le rectangle *zt* est égal au rectangle *ti*, le complément est égal au complément, comme Euclide l'a prouvé dans le premier livre [proposition 43, édit. Heiberg] ; alors, le rectangle *ci* est égal au gnomon *nuszlc*. Ce rectangle étant connu, sa largeur *cn* est également connue, égale à la différence entre les deux erreurs. Et, quand nous divisons le rectangle *ci* par sa largeur, nous obtenons *ni*, qui est donc aussi connue, et étant égale à *ad*, *ad* qui est la grandeur cherchée est ainsi connue.

Figure 2.2 – Chabert et al., p.114

temps jusqu'à avoir été défini comme un théorème affine et non pas métrique, étant donné que ses hypothèses et sa conclusion sont conservées par des applications affines. Les relations données par ce théorème peuvent se rapporter à des longueurs, des mesures algébriques ou des vecteurs. Finalement, nous n'avons qu'à rappeler les deux éléments clés pour chacun des énoncés du théorème de Thalès : le parallélisme de droites et les proportions, c'est-à-dire les proportions et la géométrie.

Bkouche (2009b), dans son *Histoire du calcul, de la géométrie à l'algèbre*, rend compte de l'existence de grandeurs et de la proportionnalité avant toute mesure, de même qu'il souligne que la mesure est une proportionnalité :

> « La mesure de la somme de deux poids est la somme de leurs mesures. Et s'il existe un rapport entre deux poids, il existe le même rapport entre leurs mesures. Pour pouvoir parler du rapport entre deux mesures entières, il a fallu que nous ayons défini la multiplication des naturels. Le passage des grandeurs à leurs mesures est un passage des opérations physiques aux opérations mentales : il est plus commode d'additionner 2 et 3 que de rassembler deux objets physiques pesant respectivement 2U et 3U. C'est un grand pas pour l'humanité. C'est parce que la mesure est une proportionnalité que les opérations sur les mesures représentent fidèlement les opérations physiques sur les grandeurs. La proportionnalité conserve l'essentiel, à savoir les sommes et les rapports. » (Bkouche, 2009b, p. 45)

Par la suite, dans cet ouvrage, nous trouvons, associées au théorème de Thalès, les propriétés mentionnées ci-dessus, où l'extension de la validité de leurs rapports inclut non seulement les fractions positives, les réels positifs et les quantités négatives mais aussi le rapport d'abscisses en lien avec de nouvelles définitions des opérations. D'une part, « le cordon ombilical de la proportionnalité [a été] coupé [...] et la linéarité [est devenue] ainsi un modèle abstrait, applicable à toutes sortes de situations en dehors de et dans les mathématiques » (Bkouche, 2009b, p. 48). D'autre part, nous avons la preuve de l'existence de la proportionnalité dans le domaine de la combinaison linéaire (Bkouche, 2009b).

Compte tenu de ce qui précède, le cœur de notre étude portant sur les relations entre calcul et géométrie au sein de l'épistémologie et l'histoire ainsi que le sens recherché tout au long de ce chapitre ont acquis une existence puisque, ce que le théorème de Thalès représente, c'est bien la multiplication géométrisée pour différents ensembles de nombres. Néanmoins, ce théorème n'existe pas comme une réponse au problème du sens de notre objet mathématique, puisque les opérations mathématiques sont là, à notre disposition, comme des outils au service de problématiques qui vont plus que loin leur propre définition. Finalement, plusieurs questions ont trouvé leurs réponses : la question portant sur les liens entre multiplication et géométrie, le contexte géométrique de transformation où cette relation devient existante, le problème historique et mathématique dont la solution nous permet de donner un sens à la multiplication en la géométrisant.

2.4 Géométrie et multiplication pour différents ensembles de nombres dans l'histoire et dans les mathématiques d'aujourd'hui

Dans cette section, nous allons présenter d'une façon synthétique certains travaux épistémologiques et didactiques portant sur la multiplication pour différents ensembles de nombres. De cette étude nous obtiendrons une image plus concrète sur les divers questionnements, associés ou non aux nôtres, portant sur la multiplication : ses définitions, obstacles, sens et possibilités d'être géométrisée, c'est-à-dire son sens en géométrie et les facteurs qui permettent son existence dans l'histoire et/ou dans les mathématiques d'aujourd'hui ainsi que le développement historique pour arriver aux représentations actuelles.

Flament (2003), dans ses conclusions sur la recherche des représentations géométriques des nombres complexes, souligne qu'

> « une des principales tâches qu'auront à réaliser la plupart des mathématiciens et qui trouvera son aboutissement au cours du XIXe siècle consistera à "dé-géométriser" le nombre, à donner un statut mathématique incontestable à la quantité imaginaire en faisant d'elle un nombre complexe, puis à "re-géométriser" le nombre. » (Flament, 2003, p. 442)

La création d'une nouvelle géométrie, en sortant du plan euclidien pour aller au plan de Gauss, a bien permis la géométrisation des opérations des nombres complexes, où la définition arithmétique de Hamilton est bien exprimée à travers la notion de « nombres couples [1] » (Flament, 2003, p. 447).

Historiquement, le besoin de ne pas chercher de justifications des formulations abstraites dans le quotidien ou dans l'expérience sensible obéit à l'apparition de nouveaux objets ma-

1. Hamilton a justifié les nombres complexes comme des couples de nombres réels sur lesquels il a défini l'addition et la multiplication. Il voulait étendre ces résultats aux vecteurs de l'espace à trois dimensions et cherchait un calcul algébrique qui puisse s'interpréter dans cet espace (Brézinski, 2006).

thématiques. De ce fait, ces objets, qui peuvent être des nouveaux nombres, ne correspondent plus à des éléments trouvés dans la Nature (monde réel).

Comme l'a dit Glaeser en parlant des nombres relatifs, « ces nombres ne sont plus découverts, mais inventés, imaginés » (Glaeser, 1981, p. 337). Par contre, il fallait trouver une représentation de ces nouveaux objets mathématiques puisque même la justification algébrique de leurs opérations, trouvée dans la permanence des propriétés propres aux ensembles de nombres précédents, a toujours eu besoin d'un regard plus concret. Voici donc ce qui correspond à un besoin explicite d'un lien plus concret entre géométrie et algèbre : le fait qu'une nouvelle géométrie ait dû être conçue après des siècles de recherche vient à corroborer l'importance d'avoir toujours une représentation des objets algébriques et arithmétiques. Ainsi, nous avons par exemple que l'abstraction de la quantité négative n'existe plus dès que son interprétation est liée à l'idée de direction (Flament, 2003, p. 170). La combinaison « grandeur absolue-direction », donne une réalité à la « quantité » négative.

2.4.1 Un regard épistémologico-didactique : règle de signes, sens et représentations de la multiplication

Pour Piaget, « un nombre symbolise *une action*, non *un état* »(Glaeser, 1981, p.306) :

> « Il est clair, en effet, que si l'on conçoit toute notion mathématique comme devant être dérivée de la perception, le nombre négatif ne saurait se justifier puisqu'il correspondrait à une absence de perception, ou moins encore, et qu'il n'y a pas de degrés dans le perceptions nulles [...] la nature essentielle du nombre n'est ni statique ni perceptive, mais bien dynamique et liée à l'action elle-même, intériorisée en opérations. » (Piaget, 1949, p. 110-115).

Alors, comment transmettre ce caractère dynamique du nombre ? Cette recherche a été un aller-retour permanent entre nombres et opérations et notre intérêt aux représentations géométriques d'une opération mathématique s'inscrit bien dans une conception dynamique du nombre. Ce point de vue nous amène petit à petit au constat que les opérations mathématiques ne sont pas seulement des outils au service de nos besoins de calcul. Représenter la multiplication renvoie à une représentation du Nombre. En conséquence, elle est bien un objet d'étude pour la didactique des mathématiques étant donné que son existence fait partie de la même essence des nombres (cf. Section 3).

Dans l'étude de Glaeser (1981), nous trouvons certaines représentations graphiques pour la multiplication des entiers relatifs dont une progression a été trouvée au cours de l'histoire. En suivant l'œuvre de Glaeser, nous trouvons tout au début de son étude l'exemple donné par Diophante (Glaeser, 1981, voir p. 312) mais l'interprétation algébrique de cette représentation nous amène à regarder la multiplication de deux entiers négatifs au sein d'un processus où elle n'est que « transitoire, avant d'obtenir un résultat 'acceptable' c'est-à-dire positif » (Glaeser, 1981, p. 313). Plus tard, au-delà de la construction des nombres et même après la validation des nombres relatifs, la question de trouver un bon modèle pour la multiplication de nombres négatifs, c'est-à-dire le fait de trouver une représentation qui permette d'illustrer toutes les propriétés de la multiplication, a encore été un travail complexe. Sur cet aspect, Glaeser conclut qu'il n'existe pas une représentation géométrique ou métaphorique appropriée comme « un bon modèle » qui permette, par exemple, d'illustrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sans que certaines composantes du modèle ne soient définies de façon arbitraire (Glaeser, 1981). Est-il donc le moment de réfléchir sur la pertinence de reprendre la « révolution accomplie par Hankel (1867) [...] de refuser la quête du bon modèle » ? (Glaeser, 1981, p. 343).

Deux ans après le travail de Glaeser, Freudenthal décrit un modèle a partir de "the geometric-algebraic permanence principle" (Freudenthal, 2003, p. 444), où la multiplication des entiers relatifs est définie comme "dilatation" ou "dilatation on the negative side" en fonction du signe du deuxième facteur, correspondant à une *flèche*. Puis, avec le support des propositions de van Hiele (1976), il affirme qu'une représentation unidimensionnelle n'est pas satisfaisante car il en faut au minimum deux :

> "The one-dimensional medium, the straight line, has not enough visual structure, two dimensions is the minimum that is required, and with a view to the graphic possibilities the most appropriate medium." (Freudenthal, 2003, p. 444-450)

Cette assertion de Freudenthal nous conduit à des réflexions portant sur le fait qu'une certaine *ambiguïté* (Bkouche, 1994) serait peut-être convenable pour faire avancer les intentions de représenter géométriquement la multiplication de nombres relatifs. Nous reviendrons plus tard sur cet aspect, lequel sera développé dans le cadre de nos propositions didactiques.

Par ailleurs, nous voudrions souligner un aspect élémentaire qui concerne les recherches portant sur la multiplication des nombres relatifs : ce sont notamment des questionnements par rapport à la construction et la validation de la règle des signes, dont plusieurs études rendent compte de la complexité. Glaeser (1981), dans son étude épistémologique sur les nombres relatifs, nous a montré la difficulté que même certains grands mathématiciens ont rencontrée pour énoncer et analyser cette règle. Il a bien défini une liste de six obstacles que seul Herman Hankel a réussi à surmonter dans sa totalité.

D'après la liste de Glaeser, l'obstacle le plus difficile à surmonter a été celui qu'il classe en cinquième position : « La stagnation au stade des opérations concrètes (par opposition à l'obstacle des opérations formelles) qui consiste à la difficulté de s'écarter d'un sens 'concret' attribué aux êtres numériques » (Glaeser, 1981, p. 308). Il fallait ainsi étudier le sujet d'un autre point de vue : « il ne s'agit plus de déterrer dans la Nature des exemples pratiques qui "expliquent" les nombres relatifs sur le mode métaphorique » (Glaeser, 1981, p. 337).

De ce fait, pour arriver à la compréhension de la règle des signes, il fallait absolument avoir conscience du fait que la multiplication de nombres relatifs n'existe pas dans la Nature et que sa démonstration, en considérant les possibilités des éléments internes à l'ensemble des nombres relatifs, se trouve formalisée par distributivité, comme Hankel (1867) et, même avant lui, Maclaurin (1742) l'avaient fait.

De cette façon, émerge l'acceptation du fait que les objets mathématiques peuvent ne pas avoir une existence dans le monde réel et que « l'existence physique n'est considérée que comme une confirmation "avantageuse" sans être essentielle » (Glaeser, 1981, p. 319). Deux ans plus tard, Freudenthal, dans son *Didactical phenomenology of mathematical structures, negative numbers and directed magnitudes*, parle d'une continuité dans la construction de l'ensemble des nombres relatifs et de l'opératoire respective à travers le geometric-algebraical permanence principle (Freudenthal, 2003, p. 435). Ainsi, nous revenons à Hankel et à la prolongation de la multiplication de $\mathbb{R}^+$ à $\mathbb{R}$ à travers l'énonciation du théorème suivant : « La seule multiplication sur $\mathbb{R}$ qui prolonge la multiplication usuelle sur $\mathbb{R}^+$ en respectant les distributivités (à gauche et à droite) est conforme à la règle des signes. »

Ribeiro (1997), dans *On the epistemology of integers*, présente la multiplication comme sémantiquement définie à partir d'une composition de fonctions (Ribeiro, 1997, p. 243) : le premier facteur, une quantité naturelle, joue le rôle d'opérateur sur un deuxième facteur de l'ensemble $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, la multiplication est justifiée comme une addition réitérée : $3 \times 5 = +15, 3 \times (-5) = -15$. "In general, for every a in $\mathbb{N}$, $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ is defined as $f_a(z) = a \times z$". D'après Ribeiro, la composition de tels opérateurs est obtenue par la multiplication de nombres naturels qui constituent leurs indices : $f_a \circ f_b = f_{a \times b}$. La composition proposée pour définir la multiplication de deux entiers négatifs est moins évidente et elle répond à la configuration d'un jeu à travers lequel Ribeiro considère pertinent de répondre à la question : “what minus times minus means?” (Ribeiro, 1997, voir p. 245). L’établisssement d’une relation entre le monde physique et la règle des signes est repris par Ribeiro (1997) quand il considère le lien fait par Viennot (1980) entre “predicatives signs / operative signs” et les “algebraic physical magnitudes / relations between magnitudes” respectivement.

Les études présentées ci-dessus abordent de différents points de vue les conceptions associées aux nombres relatifs et aux opérations. Parler de *sens*, *compréhension*, *sémantique* et des *possibilités de représentation* constitue une partie importante de chacune des recherches mais, indépendamment de leurs motivations, elles aboutissent toutes à une seule et même conclusion : la distributivité, par le principe de permanence algébrique, est une justification formelle de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

En ce qui concerne la multiplication des nombres rationnels, sont déjà connus les travaux de Guy Brousseau : il y parle du sens du produit de deux fractions. Dans le module dix de sa thèse où il décrit la mise au point collective faite par l’enseignante dans la situation concernant la multiplication par une fraction, il explicite dans une remarque que « le sens du produit de deux fractions est assez différent du sens du produit de deux nombres » (Brousseau, 1996, p. 217), lequel peut seulement être validé à travers « l’examen détaillé des propriétés formelles de cette nouvelle opération et la comparaison avec les propriétés déjà connues de la multiplication » (Brousseau, 1996, p. 217). En faisant référence à la définition du produit de deux fractions, il rajoute le paragraphe suivant correspondant toujours à la parole d’une enseignante s’adressant à sa classe :

> « Y-a-t-il une addition qui pourrait remplacer l’opération $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$? Vous vous doutez que c’est dans les agrandissements et les rapetissements (et pas dans l’addition) qu’il faut chercher des exemples pour construire cette nouvelle multiplication. » (Brousseau, 1996, p. 218)

Les exemples suivants portant sur les interventions d’une enseignante ainsi que les propres remarques de Brousseau rendent compte de la complexité de la définition cherchée, correspondant à « un objet mathématique bien déterminé : les applications linéaires rationnelles » (Brousseau, 1996, p. 220). Par rapport à la question « que signifierait $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}$? » (Brousseau, 1996, p. 221), nous voyons bien que la signification dont il parle ne consiste qu’en la validation algébrique d’une nouvelle technique : la conclusion pour les élèves est donc que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ signifie $\frac{a \times c}{b \times d}$ (Brousseau, 1996).

En étudiant ce que Brousseau a dit sur la multiplication de nombres rationnels dans sa *Théorie des Situations Didactiques*, nous avons trouvé les différents sens qu’il a donnés à cette multiplication, qu'elle ait lieu entre deux nombres rationnels ou qu'elle se produise entre un nombre naturel et un rationnel. Il remarque :

> « On peut donc s'attendre à ce que les conceptions correspondantes, que l'on a la possibilité de confondre aujourd'hui dans les calculs, se présentent en fait dans des situations différentes et par conséquent qu'elles ne soient pas d'emblée conçues de la même façon et au même âge. » (Brousseau, 1998, p. 208)

Cela est dû aux difficultés propres au fait de vouloir expliquer et donner du sens à un objet mathématique quand les éléments permettant de le faire sortent du cadre connu, compréhensible ou disponible pour les apprenants. Par exemple, une de ses définitions est la suivante : la multiplication entre deux fractions et une grandeur consiste en une « application composée de deux rationnels » (Brousseau, 1998, p. 209) sur la grandeur en question. Mais nous reviendrons plus tard sur cet aspect.

Outre le travail de Brousseau, un travail très intéressant pour nous est celui développé par Douady (1986) qui propose des interactions entre les cadres numérique, géométrique et graphique « pour faire progresser les connaissances sur les nombres » (Douady, 1986, p. 1). D'après Douady,

> « parmi toutes les grandeurs physiques qu'on est susceptible de mesurer, les longueurs et les aires jouent un rôle privilégié dans l'apprentissage [...] car certaines d'entre elles au moins modélisent des objets matériels que les enfants peuvent manipuler ou construire facilement. » (Douady, 1986, p. 22)

Elle soutient que la correspondance grandeur-nombre est le fait qui va permettre l'extension du produit de deux entiers au calcul de l'aire de deux fractions dans un rectangle. De plus, la mesure d'aires à l'aide d'une représentation géométrique devient un élément concret essentiel pour donner du sens au produit fractionnaire, car cette représentation visuelle rendra possible le constat de la commutativité de la multiplication, laquelle reste abstraite si l'on ne se situe que dans le cadre numérique.

Certains exemples dans le travail de Régine Douady nous montrent des représentations de la multiplication de fractions en faisant une association entre le cadre numérique et géométrique grâce à la représentation de « l'aire de fractions d'un rectangle ».

Ainsi, le premier exemple porte sur le produit des mesures d'un rectangle de côtés $\frac{2}{3}u$ et $\frac{3}{4}u$ qui appartient à un carré de côté u.

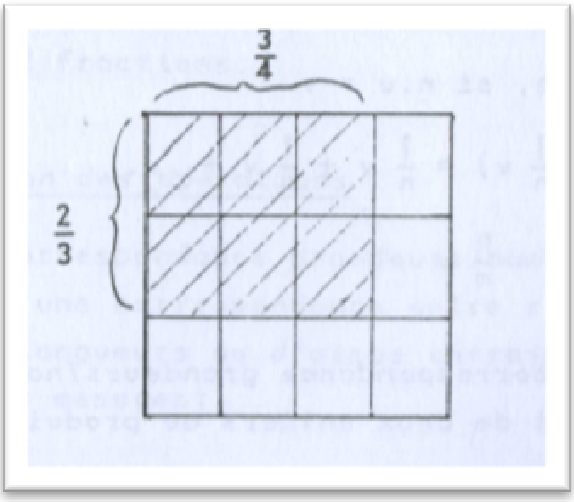


Figure 2.3 – $\frac{2}{3}u$ de $\frac{3}{4}u$

Pour l'expression $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$, le sens de la multiplication de fractions implique de prendre la valeur de la fonction $x \mapsto$ « $\frac{2}{3}$ de x » en $x = \frac{3}{4}$.

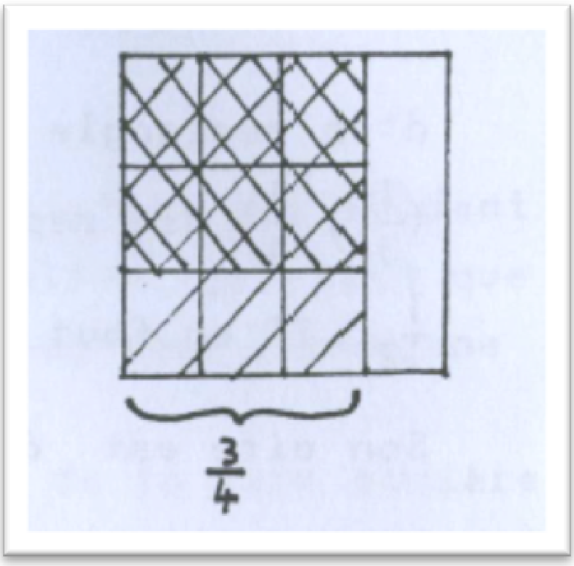


Figure 2.4 – $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

Finalement, pour $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$, il s'agit de prendre la valeur de la fonction $x \mapsto$ « $\frac{3}{4}$ de x » en $x = \frac{2}{3}$, puis on étend la signification pour n'importe quelle valeur entière ou fractionnaire : « $\frac{2}{3}$ de x » $= \frac{2}{3} \times x$.

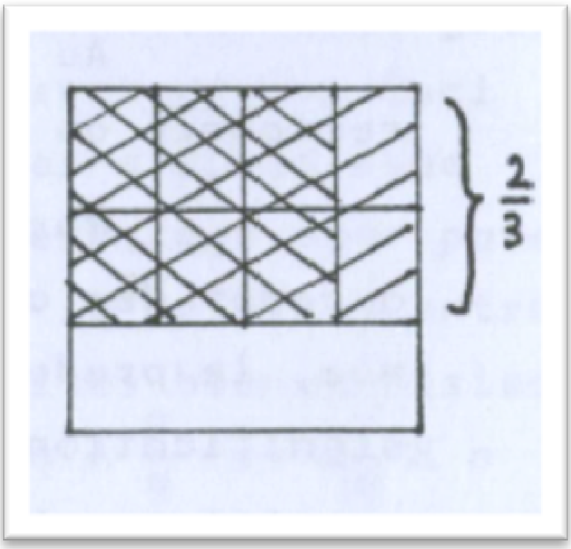


Figure 2.5 – $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

Il nous semble important de souligner que la mesure fait bien partie des éléments donnant du sens à la multiplication, de même que l'existence d'un opérateur : le terme *opérateur* définit les nombres naturels et les fractions opérant sur des espaces mesurables. Bien que la mesure soit valide pour la représentation géométrique des nombres Rationnels, ce qui apparemment pourrait faciliter le fait de donner une signification géométrique à la multiplication de ces nombres, elle ne s'applique pas aux « quantités négatives ».

Représentation géométrique des nombres relatifs

Compte tenu de ce qui précède, la multiplication des entiers négatifs ne permet pas une représentation géométrique à moins que ces « quantités » ne soient traitées en termes de sens et de direction :

> « Mais puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*. » (Argand, 1874, p. 6)

Finalement, la recherche du bon modèle géométrique de la multiplication de nombres relatifs est toujours en cours et on sait déjà qu'il n'y a pas un modèle approprié qui prenne en compte l'interprétation géométrique de toutes les propriétés de la multiplication. Néanmoins, notre recherche des possibilités d'une géométrisation de la multiplication pour différents ensembles de nombres trouve un positionnement dans l'histoire et dans l'épistémologie de nombres, comme nous l'avons déjà signalé. En revanche, cette représentation ne saurait exister que si l'on décide de « travailler [dans une certaine] ambiguïté » (Bkouche, 1994, p. i).

Claude-Paul Bruter, évoquant la multiplication, affirme qu'addition ou multiplication sont des transformations :

> « La notion de transformation, qui est associée à celle d'évolution, joue un rôle capital dans tous les règnes de la nature, et, par conséquent dans toutes les sciences. Elle est évidement présente, en mathématiques, dès qu'il y a opération. » (Bruter, 2000, p. 84)

Ces transformations peuvent être internes ou externes et « peuvent faire éclater le cadre sur lequel elles opèrent, et déboucher sur des extensions des objets anciens, voire sur des structures nouvelles par bifurcation, par métamorphose » (Bruter, 2000, p. 84).

C'est la raison pour laquelle les représentations géométriques des nombres et des opérations se développent et se justifient toujours à un niveau plus complexe et formel que celui où elles se situent. En d'autres termes, l'action et/ou les opérations mises en œuvre par des objets élémentaires ne permettent pas de rester au même niveau puisque les transformations ne peuvent s'expliquer que dans un contexte supérieur.

Ce sera donc la multiplication de nombres complexes qui possédera tous les outils pour se rendre visuelle et exprimable librement à travers la géométrie dans ce contexte spécifique que nous appelons *transformation*.

Représentation géométrique des nombres complexes

L'extension de la définition des opérations pour les nombres complexes est liée à la représentation des quantités imaginaires par des vecteurs ou des segments de droite de Wessel : « le respect de la structure propre à des nombres arithmétiques dans un premier temps, puis étendue à des 'segments', nous autorise donc à appeler 'somme' ou 'multiplication' des opérations s'effectuant sur des objets » (Flament, 2003, p. 115-116). Nous nous trouvons ainsi dans la « Géométrie de position » de Wessel (1897), méthode où il voulait éviter les opérations impossibles. De ce fait, nous trouvons une représentation pour la multiplication des « segments de droite », où il est bien possible de la caractériser comme une opération commutative, ce qui correspondrait au fait que, d'après Wessel, « la multiplication de deux segments ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les prend » (Flament, 2003, p. 126).

Le point de départ de la représentation de la multiplication de ces « segments de droites » trouve son origine dans la multiplication de Descartes (1637), où la multiplication consiste à multiplier des segments « qui ne représentent pas de grandeurs 'positives' ou 'négatives' » (Flament, 2003, p. 124).

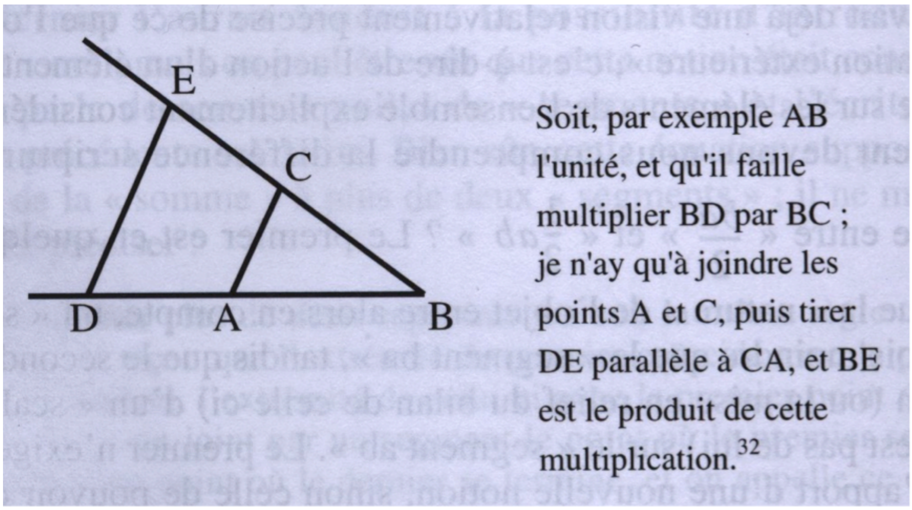


Figure 2.6 – Multiplication de Descartes

Wessel (1897) décrit le produit de segments de droite de la façon suivante :

> « Le produit de deux segments de droite doit, sous tous les rapport, être formé avec l'un des facteurs de la même manière que l'autre facteur est formé avec le segments positif ou absolu qu'on a pris égal à 1 ; c'est-à-dire que : 1°) les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils puissent être placés dans le même plan que l'unité positive ; 2°) quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité ; 3°) en ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction de produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs. » (Wessel, 1897, p. 9)

À partir de ce produit, Flament s'interroge sur les possibilités de rendre intuitif le produit $(-1) \cdot (-1) = 1$. Puis, après la présentation du produit de deux segments décrit par Wessel, il va en tirer une nouvelle construction, laquelle

« ne pouvait pas être conçue indépendamment de la première : 1°) la mesure de sa longueur est le produit des mesures correspondantes aux longueurs des 'segments' OA et OB ; 2°) sa direction s'obtient en faisant tourner, autour du point O et dans le sens trigonométrique, la demi-droite Ou d'un angle égal à la somme des angles dont il faudrait faire tourner (toujours dans le même sens) la demi-droite Ou pour l'amener respectivement en coïncidence avec les demi-droites OA et OB. » (Flament, 2003, p. 126)

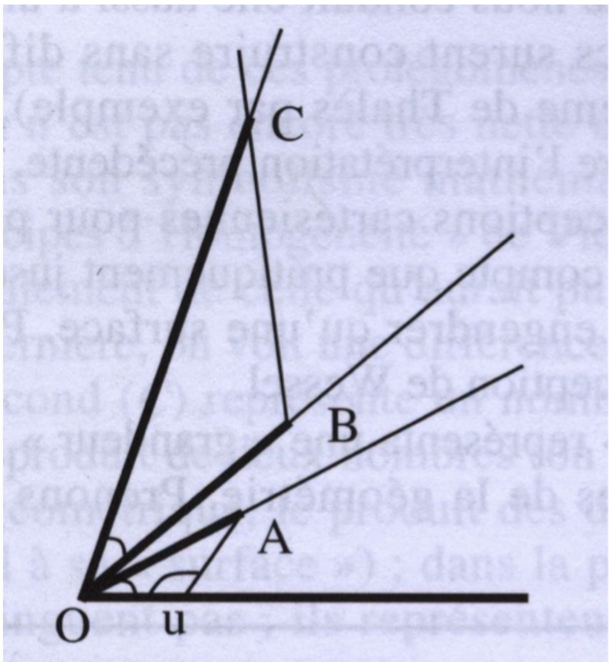


Figure 2.7 – Interprétation de la multiplication de Wessel par Flament

En suivant la réflexion de Flament, il est évident que, sans les conceptions cartésiennes, cette interprétation du produit n'aurait pas pu exister. Même si les grecs construisaient des triangles semblables, « il faut en effet tenir compte que pratiquement jusqu'à Descartes un tel produit ne pouvait engendrer qu'une surface » (Flament, 2003, p. 126). Comment justifier, donc, un produit de même nature que les facteurs, c'est-à-dire un autre segment ? Et, en nous situant dans un cadre encore plus complexe, comment rendre intuitif le produit de deux « segments indirects » (Flament, 2003, p. 130) ? La quête d'une réponse nous amène bien sûr à une difficulté encore plus élémentaire se référant à la seule représentation géométrique d'une racine carrée de -1 ; par contre, une fois qu'elle a été trouvée ou inventée, la voie est libre pour accéder à toutes les autres réponses pouvant, de cette manière, démontrer algébriquement et représenter géométriquement la multiplication des segments comme Wessel l'a bien fait grâce à l'introduction trigonométrique de l'expression générale de segments de droite directs et indirects, ces derniers donnant aux nombres imaginaires leur « droit de cité dans la géométrie » (Flament, 2003, p. 131).

Donc, premièrement,

> « §9 Le segment de droite représenté par [2] $\cos v + \epsilon \sin v$ est un rayon de cercle dont la longueur est égale à 1 et dont la déviation par rapport à cos 0° est égal à l'angle v. Il s'en suit que $r.\cos v + r.\epsilon \sin v$ désigne un segment de droite dont la longueur est égale à r et dont l'angle de direction est v. Voila l'expression générale d'un segment de droite quelconque, qui est situé dans le plan de cos 0° et dont la longueur est r. » (Wessel, 1897, p. 11)

Deuxièmement,

> « §10 Si nous désignons par a, b, c, d, des segments de droite directs (c'est-à-dire que leurs "longueurs" contribuent entièrement à la diminution ou à l'augmentation de la distance "absolue" d'un point à un plan fixe) d'une longueur quelconque, positif ou négatifs, et que les deux segments indirects $a+\epsilon b$ et $c+\epsilon d$ se trouvent dans le même plan que l'unité absolue, on pourra trouver leur produit même dans le cas où leurs déviations par rapport à l'unité absolue sont inconnues :
>
> 'Démonstration :
>
> Soit A la longueur du segment $a + \epsilon b$ et v degrés sa déviation par rapport à l'unité absolue ; soit C la longueur du segment $c + \epsilon d$ et u sa déviation ; alors, d'après le §9, on aura :
>
> $$a + \epsilon b = A.\cos v + A.\epsilon \sin v$$
>
> Et par conséquent :
>
> $$\begin{aligned} a &= A.\cos v \\ b &= A.\sin v \\ c &= C.\cos u \\ d &= C.\sin u \end{aligned}$$
>
> Or, d'après le §4 [3], on aura :
>
> $$\begin{aligned} (a+\epsilon b)(c+\epsilon d) &= A.C.[\cos(v+u) + \epsilon \sin(v+u)] \\ &= A.C.(\cos v \cos u - \sin v \sin u + \epsilon(\cos v \sin u + \cos u \sin v))) \end{aligned}$$

2. Wessel designe par ϵ la racine carrée de -1.
3. Produit C de deux segments (Wessel, 1897, p. 9).

Donc, en remplaçant $A.C.$ cos v cos u par ac et $A.C.$ sin v sin u par bd, etc., on obtiendra les résultats qu'il fallait démontrer.' » (Wessel, 1897, p. 11-12) (c'est-à-dire $(a + \epsilon b) \times (c + \epsilon d) = ac - bd + \epsilon(ad + bc)$).

Nous sommes à la fin du XVIIIe siècle, au moment de la découverte et de la démonstration du fait que la multiplication de nombres complexes correspond à la somme d'angles et au produit de longueurs, telle qu'elle est actuellement définie.

Le lien historiquement établi entre la multiplication de segments et la multiplication de nombres complexes constitue, comme nous le verrons par la suite, un élément clé dans l'élaboration de nos séances expérimentales mettant en relation multiplication et géométrie.

2.5 Conclusion

La recherche d'un lien entre géométrie et calcul dans certains travaux historiques, épistémologiques et didactiques, nous a permis de constater la complexité non seulement de nos intentions mais aussi de notre objet de recherche. Un voyage qui a commencé dans l'histoire des chiffres et qui a terminé dans la représentation géométrique de la multiplication de nombres complexes a mis en évidence l'existence historique d'une relation aussi étroite que controversée entre des représentations (géométriques et non géométriques) et le calcul numérique. Ainsi, le besoin de l'homme primitif de représenter les nombres avec des objets de la vie réelle (lesquels devenaient de plus en plus symboliques jusqu'à leur conversion en une véritable notation numérique) devient un obstacle au moment de vouloir faire avancer la recherche des mathématiques au XIXe siècle ! Néanmoins, des allers-retours entre le concret, le visuel et l'abstrait ont été bien fréquents dans l'histoire, comme nous l'avons mentionné au cours de ce travail.

Par ailleurs, un aspect important à souligner est le fait qu'à travers cette étude nous ne cherchions pas à établir un parallélisme entre le développement historique des objets mathématiques et le processus actuel d'apprentissage des mêmes objets au cours de la scolarité. Par contre, cette recherche s'est fondée sur deux idées élémentaires : d'une part, les représentations géométriques permettent d'accéder à l'intelligence du monde symbolique (dans le sens où ces représentations peuvent être une aide réelle ainsi qu'un besoin sans lequel on n'atteint pas cette intelligence) et, d'autre part, les recherches en mathématiques et l'histoire nous permettent d'accéder à la richesse des objets mathématiques.

Le fait d'avoir trouvé des réponses à nos questions initiales portant sur les liens entre géométrie et multiplication rendant compte des significations transversales pour différents ensembles de nombres nous conduit à considérer les idées mentionnées ci-dessus comme des faits qui confirment l'importance de cette étude, qui, même si elle n'est que l'introduction d'une recherche beaucoup plus large qui doit sans doute continuer, devient concrètement le fondement de nos propositions didactiques.

Ainsi, il faut bien comprendre que nos intentions didactiques ne visent pas la *recherche d'un bon modèle* pour la représentation de la multiplication pour différents ensembles de nombres. Nous parlons de géométrisation, d'intégration de cadres mathématiques dans l'apprentissage ou le réinvestissement du calcul numérique. Nous parlons du sens des opérations et notamment du sens géométrique de la multiplication pour la compréhension d'un objet mathématique. Cet objet mathématique est bien sûr la multiplication elle-même mais aussi le Nombre, car, comme l'a précisé Piaget, *un nombre symbolise une action* et c'est bien cette interprétation dynamique du nombre qui a produit tout au long de l'histoire ce besoin d'une représentation, ce besoin, dirions-nous, de voir *en action* les nombres et leurs opérations. Que la géométrie disparaisse pour faire avancer la recherche en mathématiques ne veut pas du tout dire qu'elle ne doit plus exister dans l'enseignement ni dans les représentations pour les chercheurs. Nous l'avons déjà vu : « dé-géometriser le nombre, puis le re-géométriser », « passer de l'image à la géométrie puis à la forme abstraite », « la création d'une nouvelle géométrie comme réponse au besoin d'avoir toujours une représentations des objets arithmétiques », « le théorème de Thalès ou l'objet mathématique qui représente bien la multiplication géométrisée pour différents ensembles de nombres », « les transformations géométriques ou le contexte d'existence de la relation entre multiplication et géométrie ». Et nous ajoutons :

> « Si les points d'une droite sont des nombres, on doit pouvoir comprendre géométriquement la signification des opérations élémentaires entre nombres : l'addition et la multiplication. La clé de cette compréhension est dans l'idée de transformation. » (Leys, Ghys, & Alvarez, s. d.).

Compte tenu de ce qui précède, nous allons du plan historico-épistémologique au plan expérimental et didactique, où il s'agit d'élaborer une séquence d'enseignement pour des élèves de collège et de lycée en France. Comme nous l'avons déjà mentionné, nous nous intéressons aux possibilités des élèves de chercher et d'établir un lien entre multiplication et géométrie ; nous avons maintenant les outils épistémologiques qu'il nous fallait pour les conduire dans leur recherche. Pourrions-nous faire ressortir des justifications intuitives liées aux transformations géométriques en utilisant la construction géométrique de la multiplication de Descartes pour introduire et/ou réinvestir des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?

Chapitre 3

Dans la recherche d'une intégration de nos propositions didactiques : quelle place pour la multiplication dans les programmes de secondaire en France ?

3.1 Introduction

À travers l'étude de la multiplication dans les programmes officiels, « les instances noosphériennes les plus proches des professeurs » (Chevallard, 2002, p. 9), nous prétendons nous situer dans le contexte institutionnel où la notion de multiplication pour différents ensembles de nombres a été placée dans l'enseignement français. Nous sommes conscients du fait que cette analyse ne rend compte ni de la réalité des connaissances mathématiques acquises par les élèves à ces niveaux de scolarité ni des démarches méthodologiques effectivement mises en places par les enseignants. De fait, notre regard sera peut-être naïf mais nous sommes dans une recherche spécifique. L'étude des programmes ne consiste ni en l'analyse de techniques ni en des processus permettant de les acquérir. Nous nous intéressons à une identification des intentions institutionnelles par rapport à l'enseignement des mathématiques : notamment, nous cherchons à identifier le rôle de la multiplication là où de nouvelles écritures numériques ainsi que de nouveaux nombres se sont intégrés à l'enseignement.

Nous voulons bien sûr répondre à certaines questions classiques comme les suivantes : quand et où parle-t-on de multiplication ? Comment cette notion est-elle présente dans les programmes ? Néanmoins, étant donnée la nature de notre étude, c'est-à-dire notre intérêt aux liens entre multiplication et géométrie, nous avons adapté une autre question à nos intentions : quelles sont les conditions qui permettent ou, au contraire, entravent l'existence ou la proposition des situations d'apprentissage mettant en relation calcul et géométrie et favorisant la compréhension des objets mathématiques ainsi que le développement du raisonnement mathématique ? (Artaud, 1997)

Pour cela, dans deux institutions scolaires, précisément le collège et le lycée (notamment la classe de Terminale S), nous allons étudier une partie des programmes en vigueur ainsi que certains documents d'accompagnement de façon à pouvoir répondre à chacune de nos questions ci-dessus. Cela sans l'intention de réaliser une étude écologique (Chevallard, 2002) de notre objet mathématique. En effet, nous ne nous intéressons pas, particulièrement dans le cadre de cette recherche, à l'analyse des organisations mathématiques. Nous sommes dans l'élaboration d'une situation d'apprentissage (Brousseau, 1998) à laquelle nous voulons, de manière générale, donner une place institutionnellement reconnue, dans la mesure où elle prend en compte la mise en fonctionnement de certains éléments cognitifs qui visent à favoriser, d'une part, l'accès à la compréhension (Sfard, 2008) d'objets mathématiques divers et, d'autre part, le développement du raisonnement mathématique approprié pour la résolution de problèmes.

Répondre à certains besoins cognitifs des élèves dans le processus d'apprentissage des mathématiques pourrait, si l'institution le reconnaît comme important, motiver une future intégration plus concrète de situations *significatives* pour les élèves, situations qui favorisent les moments de recherche dans les classes de sorte que « faire des mathématiques [consiste à] se les approprier par l'imagination, la recherche, le tâtonnement et la résolution de problèmes, dans la rigueur de la logique et le plaisir de la découverte » (Programmes officiels, 2008, p. 2).

Nous commençons donc une présentation de quatre documents d'accompagnement du programme officiel de mathématiques pour le collège et un aperçu du programme officiel pour la classe de Terminale S, portant exclusivement sur les références au produit des nombres complexes. Dans cette présentation, nous allons rendre compte, d'une part, des connaissances mathématiques associées au traitement de la multiplication et, d'autre part, des possibilités d'une intégration de nos propositions didactiques inspirées de notre étude épistémologique et historique portant sur les relations entre multiplication et géométrie.

Par la suite nous rendrons compte de nos réflexions résultant de certains constats didactiques associés à la présence et au rôle de la multiplication dans les programmes officiels ainsi que de quelques réflexions par rapport à la compréhension et à l'appropriation des connaissances mathématiques par les élèves.

Finalement, nous allons introduire notre situation expérimentale d'apprentissage (ou *séquence d'apprentissage*, comme nous allons aussi l'appeler par la suite) en introduisant en même temps quelques éléments clés constituant une partie du regard théorique où se fondent nos intentions didactiques et qui sustentent nos convictions par rapport à l'apprentissage et l'enseignement de mathématiques.

3.2 Nombres et multiplication : étude du document d'accompagnement *Les nombres au collège*

La multiplication est présente dans les programmes officiels tout au début du collège avec l'introduction des nombres rationnels. Dans ce contexte, la multiplication est un outil ayant un rôle déterminé : celui de faire comprendre cette nouvelle écriture « $\frac{a}{b}$ » correspondant à un nouveau nombre. Ainsi, pour comprendre le sens de l'écriture fractionnaire, les fractions sont interprétées de la façon suivante : d'une part, « $\frac{7}{4}$ c'est 7 fois un quart » et, d'autre part, « $\frac{7}{4}$ c'est le quart de 7 » (Programmes officiels, 2006, p. 2). La première interprétation est déjà connue à l'école élémentaire et il est possible de la représenter dans des situations de mesure ou dans des situations de repérage sur une ligne graduée. Les deux cas sont illustrés visuellement comme nous le verrons sur la figure 3.1 de la page 64.

La complexité de l'équivalence entre ces deux significations d'une fraction, qui correspondent bien à des interprétations en termes de multiplication, n'est pas négligeable. Néanmoins, des vérifications et des justifications devraient permettre aux élèves de bien les assimiler à partir de la classe de sixième. La possibilité d'effectuer une vérification dans le cadre des grandeurs ou à l'aide d'un repérage sur une ligne graduée est explicitement mentionnée. La justification s'appuie quant à elle sur un regard théorique « utilisant soit le langage ordinaire soit le langage symbolique » (Programmes officiels, 2006, p. 3).

« On part de ce qui est connu : $\frac{7}{4} = 7 \times \frac{1}{4}$ (7 fois un quart, défini au cycle 3) ; on se demande si cela est compatible avec le fait que $\frac{7}{4}$ est le nombre qui multiplié par 4 donne comme résultat 7 (c'est-à-dire aussi le quart de 7) :

– en langage ordinaire, le raisonnement suivant peut-être exprimé : '4 fois 7 quarts, c'est 28 quarts, c'est 7 fois 4 quarts, donc 7 fois 1, donc 7'.
– le même raisonnement peut-être exprimé à l'aide du langage symbolique : $4 \times \frac{7}{4} = \left(7 \times \frac{1}{4}\right) = 28 \times \frac{1}{4} = \frac{28}{4}$. Or $\frac{28}{4} = 7 \times \left(4 \times \frac{1}{4}\right) = 7 \times \frac{4}{4} = 7 \times 1 = 7$. Donc $\frac{7}{4}$ est le nombre qui multiplié par 4 donne 7 : c'est donc le quotient de 7 par 4. »

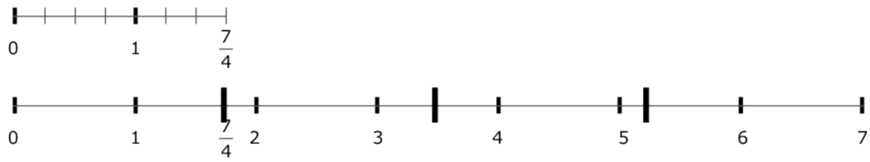


Figure 3.1 – Représentation géométrique des deux interprétations de l'écriture fractionnaire faisant référence à la multiplication

« À partir de là, l'usage des fractions peut se diversifier notamment pour généraliser les procédures utilisant l'aspect multiplicatif de la linéarité ou le recours au coefficient de proportionnalité dans le traitement de problèmes de proportionnalité : des raisonnements fondés sur le fait que '12, c'est 3 fois 4' peuvent être étendus pour exprimer que '7 c'est $\frac{7}{4}$ fois 4', puis en classe de troisième que $f(7) = f(\frac{7}{4} \times 4) = \frac{7}{4} f(4)$. » (Programmes officiels, 2008, p. 3)

Compte tenu de ce qui précède, réfléchissons à nouveau à l'étroite relation entre les nombres et les opérations. Ces opérations, usuellement perçues comme des outils de calcul, deviennent de vrais objets d'étude si nous les situons au sein des mathématiques comme des éléments donnant du sens au Nombre. Nous reviendrons plus tard sur cet aspect.

Par la suite, dans l'étude de ce document en lien avec les programmes du collège, la deuxième signification de l'écriture fractionnaire mentionnée ci-dessus a une place explicite dans les programmes de la classe de sixième avec pour objectif de « mettre en place une nouvelle signification de l'écriture fractionnaire comme quotient de deux entiers » (Programmes officiels, 2008, p. 14). Puis on la retrouve encore comme un outil d'enseignement pour comprendre la composition et la signification d'un nombre décimal (Programmes officiels, 2006, p. 6). De plus, elle est présente dans la résolution de problèmes de grandeurs et mesures dans le but de « savoir choisir une unité appropriée et effectuer des changement d'unités » (Programmes officiels, 2008, p. 18) :

> « Le cas des durées est également très intéressant. Comment écrire avec deux unités une expression comme 3,2 h ? Les élèves répondent fréquemment 3h 2 min ou 3h 20 min, ce qui traduit un mauvais décryptage de l'écriture décimale. Pour répondre correctement, il faut interpréter 2 comme 2 dixièmes d'heure ou comme 2 dixièmes de 60 min, donc comme 12 min, ce qui donne la réponse 2h 12 min. De telles questions posées aux élèves (passage de l'expression avec une seule unité à l'expression dite « complexe » avec plusieurs unités ou inversement) sont de nature à provoquer une réflexion sur la signification de l'écriture décimale. » (Programmes officiels, 2006, p. 6)

Cette signification de l'écriture décimale induit implicitement la signification du produit comme résultant de l'action d'un opérateur sur un autre.

Finalement, le sens de l'écriture fractionnaire sera retravaillé dans la classe de cinquième où le travail sur la multiplication

> « porte à la fois sur les situations dont le traitement fait intervenir le produit de deux nombres en écritures fractionnaires (en relation avec des différentes significations de ces écritures) et sur la justification du procédé du calcul. » (Programmes officiels, 2008, p. 22)

En ce qui concerne les nombres relatifs en classe de cinquième, une nouvelle problématique émerge : les nombres négatifs n'expriment plus des quantités ou des grandeurs, « ce qui constitue une rupture importante avec les nombres manipulés jusque là » (Programmes officiels, 2006, p. 8). Puis, comme l'interprétation des opérations est devenue plus difficile — surtout celle de la division et de la multiplication —, la prise en compte de diverses significations des nombres relatifs est considérée comme utile à différents moments de l'apprentissage. Ainsi, les nombres relatifs sont définis comme « nombres qui rendent la soustraction toujours possible (notion d'opposé), nombres qui permettent d'envisager de graduer la droite toute entière (renforcement de la notion d'opposé), nombres qui ont un usage 'pratique' : températures, gains, pertes… » (Programmes officiels, 2006, p. 8). En classe de quatrième, le calcul avec ces nouveaux nombres, y compris les nombres rationnels négatifs, ne doit pas « se limiter à l'enseignement de règles formelles » (Programmes officiels, 2006, p. 9) et le fait que « le calcul de produits nécessite de se référer aux propriétés des opérations que l'on souhaite prolonger à ce type de nombres » (Programmes officiels, 2006, p. 9) est explicité. À ce niveau, le programme officiel remarque l'importance de la maîtrise du calcul sur les nombres relatifs, qui doit être une extension du calcul des nombres positifs en écriture décimales ou fractionnaire.

3.3 Calcul numérique et multiplication : étude du document d'accompagnement *Le calcul numérique au collège*

L'importance donnée dans le programme du collège au « sens des opérations » est reprise dans ce document d'accompagnement. Une des compétences explicitées pour apprendre à calculer porte sur l'identification « des différentes situations qu'une opération permet de résoudre efficacement, ce qui est communément désigné sous le terme "sens" des opérations » (Programmes officiels, 2007b, p. 8). Cet aspect est très important puisque, comme nous l'avons déjà vu dans l'étude du document d'accompagnement *Les nombres au collège*, la multiplication est bien une opération mathématique qui a plusieurs sens en soi-même mais qui, de plus, sert à construire et à donner du sens au Nombre.

De ce fait, nous cherchons dans ce document le sens du calcul. D'une part, nous allons identifier le sens dont il est porteur et, d'autre part, la façon dont ce sens-là devrait être construit pour et par les élèves. Nous ne devons pas oublier que nous sommes toujours en train d'étudier les traitements officiellement proposés pour le calcul numérique ainsi que la façon dont les élèves peuvent les aborder dans des situations qui favorisent une mise en relation des différents cadres mathématiques.

Pour le calcul écrit, l'importance « des procédures construites ou reconstruites » (Programmes officiels, 2007b, p. 2) a été clairement explicité dans ce document. Cet aspect est très intéressant d'un point de vue cognitif car la construction personnelle de procédures de calcul peut exister seulement grâce aux raisonnements mobilisés par les élèves :

> « L'exploitation en classe des diverses procédures mises en œuvre par les élèves pour un même calcul permet l'accent sur les raisonnements mobilisés et sur les propriétés des nombres et des opérations utilisées 'en acte'. » (Programmes officiels, 2007b, p. 4)

Nous voyons bien que le sens des opérations n'est pas rattaché à la technique du calcul mais qu'il est toujours lié à la connaissance des nombres, de leurs propriétés ainsi qu'à la résolution de problèmes.

Regardons ce qui se passe concrètement lors de la proposition du traitement d'une multiplication. Dans la multiplication d'une fraction par un entier naturel, cet entier étant défini comme « l'unité », la construction du sens de l'opération « prendre une fraction de… » est liée à l'addition réitérée d'une fraction de cette unité : « prendre 7 tiers de 13 flopeks, c'est prendre 7 fois le tiers de 13 flopeks » ((Programmes officiels, 2007b, p. 11).

Le traitement de la multiplication d'un entier naturel par un quotient de deux entiers est proposé pour la classe de sixième via le « [recours] au sens premier de la multiplication, celui d'une addition réitérée » (Programmes officiels, 2007b, p. 12). Par contre, ce traitement n'est plus valide quand on multiplie un décimal non entier par un quotient de deux entiers. Le traitement de cette multiplication est fait en se basant sur la définition d'un quotient vis-à-vis de l'associativité :

> « Pour déterminer le produit de $1,7$ par $\frac{5}{7}$ multiplions-le par 7 : le produit recherché, multiplié par 7, est égal à $1,7 \times 5$: par définition d'un quotient, ce nombre est donc le quotient de $1,7 \times 5$ par 7. Et donc $1,7 \times \frac{5}{7} = \frac{1,7\times5}{7}$. Cet exemple étant générique, on en déduit que a étant un décimal, b et c deux entiers avec c non nul : $a \times \frac{b}{c} = \frac{a\times b}{c}$. La démonstration précédente montre, en toute rigueur, que si la multiplication demeure associative "nouveaux" nombres, alors le produit d'un nombre décimal par un quotient d'entiers est nécessairement défini ainsi. » (Programmes officiels, 2007b, p. 12)

Le calcul est donc légitimé par démonstration, et la justification est la même quand on cherche le produit d'un décimal par un quotient de deux entiers. Le sens de l'opération « multiplier différents nombres » consiste en la légitimation de la technique correspondante. De ce fait, « prendre $\frac{b}{c}$ de a » conduit à effectuer $\frac{a\times b}{c}$, de même que $a \times \frac{b}{c} = \frac{a\times b}{c}$.

Le produit de deux quotients est lié au calcul de l'aire d'un rectangle de mesures non entières (cf. Figure 3.2), mais il s'appuie aussi sur la notion de quotient. Les deux sont considérées comme des preuves déjà accessibles en classe de cinquième.

La preuve se basant sur la notion de quotient justifie la technique qui consiste à multiplier numérateur avec numérateur et dénominateur avec dénominateur (Voir démonstration, Programmes officiels, 2007b, p. 12).

Par ailleurs, lorsqu'il s'agit d'utiliser la propriété multiplicative de linéarité ou le coefficient de proportionnalité (pour les cas où il faut déterminer une quatrième proportionnelle), il est explicite que l'on « opère sur les grandeurs » (Programmes officiels, 2007b, p. 13).

D'après le document d'accompagnement, la plupart des élèves ne rencontrent pas de difficultés sur le sens ou la technique de la multiplication de nombres décimaux. Pour favoriser la compréhension de la technique, il est très important de « [mobiliser] la signification de l'écriture à virgule d'un nombre décimal » ; de la même manière, « l'oralisation joue un rôle déterminant dans la justification de la technique et donc pour sa compréhension » (Programmes officiels, 2007b, p. 15). Néanmoins, il est explicité que la multiplication d'un

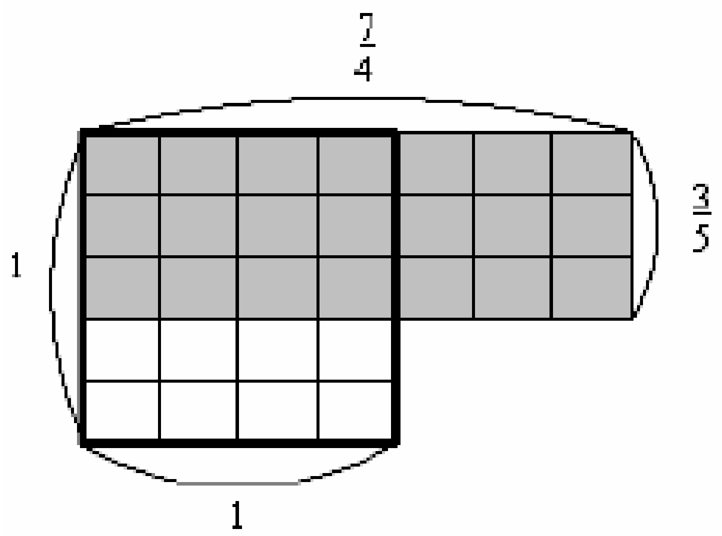


Figure 3.2 – Représentation géométrique du produit de deux quotients en référence aux aires

décimal par un autre décimal présente des difficultés quant à la construction du sens car elle ne peut plus être conçue comme une addition réitérée, « comme c'était le cas pour le produit d'un entier ou d'un décimal par un entier » (Programmes officiels, 2007b, p. 15).

Le traitement des nombres décimaux en écriture fractionnaire dans le contexte de la mesure d'aires justifie la technique de la multiplication de deux nombres décimaux (Programmes officiels, 2007b, p. 16).

Dans le cadre de la proportionnalité, l'exemple suivant, où l'on souhaite déterminer le prix de $2,14$ kg d'un produit dont le prix au kilogramme est de $3,7$ €, rend compte des applications et des interprétations de la multiplication :

- le prix de 2 kg est $3,7 \times 2 = 7,4$ € ;
- le prix de $\frac{1}{10}$ kg est dix fois moins que $3,7$ €, soit $0,37$ € ;
- le prix $\frac{4}{100}$ kg est $\frac{4}{100}$ de $3,7$ €, soit 4 fois $\frac{1}{100}$ de $3,7$ €, c'est-à-dire $4 \times 0,037 = 0,148$ €.

En additionnant les prix de chacune de ces quantités, nous arrivons au résultat suivant : $2,14$ kg du produit coûtent $7,918$ €.

D'ailleurs, le programme souligne l'importance de bien travailler avec les élèves le changement du sens dans le passage de la multiplication sur les entiers à la multiplication sur les décimaux. Essentiellement, la multiplication n'agrandit pas forcément, on en déduit donc que le sens de la multiplication correspond bien à une opération qui peut augmenter ou diminuer une grandeur.

La multiplication des nombres relatifs est construite en la considérant comme une addition réitérée : $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = -6$. Les propriétés connues pour les naturels sont bien conservées : $2 \times (-3) = (-3) \times 2 = -6$. Il ne reste qu'à définir le produit de deux négatifs. Pour cela, un tableau où « la symétrie par rapport aux bandes grisées correspondent à un changement de signe » pourrait aider à établir des conjectures sur ce nouveau produit (cf. Figure 3.3). Le processus de validation se fait en recourant à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (cf. Section 2.4.1).

−9	−6	−3	3	3	6	9
−6	−4	−2	2	2	4	6
−3	−2	−1	1	1	2	3
−3	−2	−1	×	1	2	3
			−1	−1	−2	−3
			−2	−2	−4	−6
			−3	−3	−6	−9

Figure 3.3 – Tableau symétrique rendant compte du produits entre deux nombres relatifs

3.4 Grandeurs, proportionnalité et multiplication au collège

Nous avons déjà fait référence aux grandeurs dans la présentation de la multiplication à l'intérieur des autres documents d'accompagnement. Ici, nous nous intéressons particulièrement à un approfondissement dans l'étude des traitements proposés pour la multiplication en lien avec les grandeurs et la proportionnalité.

Tout d'abord, dans ce contexte de grandeurs, la multiplication par un entier n a été tout simplement définie à l'aide de l'addition itérée (Programmes officiels, 2007a, p. 4). Cette addition itérée est bien mise en évidence pour la construction d'une droite graduée, où l'unité u résultant de la force du *travail de Descartes* permet bien la production et le placement d'un point A ayant pour longueur, par exemple, $2,4u$ (Programmes officiels, 2007a, p. 7).

De la même manière, la multiplication est un outil pour le calcul des aires. La procédure suivie peut être visualisée grâce à la représentation géométrique d'un rectangle où l'unité d'aire est un carré de côté u (Programmes officiels, 2007a, p. 19).

Les grandeurs qui sont le quotient ou le rapport de deux autres grandeurs (Programmes officiels, 2007a, p. 23) permettent de revenir, de façon plus concrète, au sens de l'écriture fractionnaire. Nous pouvons donc constater que la multiplication est toujours un outil qui donne du sens non seulement aux nombres mais aussi aux grandeurs et notamment à la relation entre deux grandeurs de même espèce :

> « a et b désignant deux grandeurs de même espèce (deux longueurs, ou deux aires, ou deux durées…) a étant non nulle, il existe un nombre réel positif k et un seul tel que : $b = ka$. Ce nombre est appelé rapport de b à a, et noté $\frac{b}{a}$. C'est également la mesure de b quand on prend a comme unité. Les deux égalités '$b = ka$' et '$\frac{b}{a} = k$' sont donc, par définition, équivalentes. » (Programmes officiels, 2007a, p. 23)

La multiplication intervient aussi dans les calculs portant sur des grandeurs d'espèces différentes. Ainsi, donner du sens au calcul de la vitesse moyenne et au calcul de distances en particulier « conduit à définir une grandeur qui, multipliée par une durée, donne une longueur : il est naturel de l'appeler quotient d'une longueur par une durée, par analogie avec la définition du quotient de deux nombres » (Programmes officiels, 2007a, p. 25).

En outre, le produit de deux grandeurs quelconques nous permet d'obtenir une troisième grandeur ou *grandeur de deuxième espèce* (Dhombres, 1987) :

> « Il est utile chaque fois que, à deux grandeurs g et g' (de même espèce ou non), on peut en associer une troisième, qui est telle que : chaque fois que l'une des grandeurs est multipliée par un nombre, l'autre étant maintenue constante, la troisième est multipliée par ce même nombre. Cette troisième grandeur est appelée 'produit de g par g'' et notée $g \times g'$ ou parfois gg'. » (Voir le développement dans la page 28 du document en question)

Finalement, nous ne pouvons que mentionner le lien étroit entre grandeur et proportionnalité dans des contextes divers. Les exemples principaux portent sur des rapports de longueurs et sur des situations mettant en jeu des grandeurs d'espèces différentes telles que masse/prix, durée/distance… (Programmes officiels, 2007a, p. 31) où les procédures portant sur le passage à l'unité, la propriété d'homogénéité et l'utilisation d'un des coefficients de proportionnalité sont des activités essentielles.

Nous avons trouvé dans le document d'accompagnement portant sur la proportionnalité un élément qui a particulièrement attiré notre attention. C'est là que des relations explicites entre calcul et géométrie, outre le calcul des aires et les représentations d'un produit dans la droite graduée, apparaissent dans les programmes. Cette relation correspond bien aux liens déjà mentionnés dans notre étude épistémologique : multiplication et géométrie, agrandissement et réduction de figures, proportionnalité et théorème de Thalès. Les programmes le signalent bien dans la partie géométrie : « agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et de celles de la figure à obtenir » (Programmes officiels, 2008, p. 31). Néanmoins, cette relation n'a été présentée que dans le document d'accompagnement mentionné ci-dessus et dans un contexte qui intègre différents cadres mathématiques : grandeurs, numérique et graphique. Le cadre géométrique a été inclus dans le paragraphe concernant une articulation avec d'autres domaines du programme, où notamment le théorème de Thalès et l'agrandissement et la réduction de figures ont été explicitement mentionnés. En conséquence, le contexte de transformation où calcul et géométrie se rencontrent est implicitement présent dans le programme de collège à travers l'agrandissement et la réduction de figures et l'analyse de ces situations grâce à l'utilisation du théorème de Thalès. Par contre, la place donnée à ce type de relations n'est sans doute pas une priorité institutionnelle.

3.5 Des nouveaux nombres : multiplication et nombres complexes en classe de Terminale S

En ce qui concernait le traitement des nombres complexes dans les programmes officiels de 2001, il a été explicité que « le vocabulaire [associé aux nombres complexes] sera introduit à partir de considérations géométriques » (Programmes officiels, 2001, 69), en ajoutant dans les commentaires que « la vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan » (Programmes officiels, 2001, 69).

Nous pouvons remarquer une différence considérable avec la proposition du nouveau programme. Heureusement, les nombres complexes sont encore là, ce qui permettrait, au moins dans une certaine mesure, qu'un nouvel ensemble de nombres vienne compléter et enrichir les connaissances sur les nombres et sur les opérations mathématiques élémentaires.

Dans le programme actuel, les contenus à travailler et la *représentation géométrique* des nombres complexes est encore explicite. Ceci implique nécessairement une capacité associée, qui consiste à « représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur ». De la même manière, la détermination de l'*affixe* d'un point ou d'un vecteur ainsi que la forme trigonométrique d'un nombre complexe doivent être aussi interprétées géométriquement dans un repère orthonormé direct. Néanmoins, on ne parle plus de « calcul sur des points du plan ».

De ce fait, représenter géométriquement un nombre complexe ne semble pas du tout viser une réelle compréhension géométrique ni de ces nombres ni des opérations qui leur sont associées. Par contre, ces opérations doivent être apprises afin d'être capable de les « effectuer [...] sur les nombres complexes écrits sous différentes formes » (Programmes officiels, 2011, 9).

Les représentations géométriques des nombres complexes sont tout de même nécessaires pour développer l'acquisition générale de ces nombres (Panoura, Elia, Gagatsis, & Glatilis, 2007). L'absence d'un travail plus concret prenant en compte la représentation géométrique de la multiplication de nombres complexes nous semble lamentable car elle exclut automatiquement un travail plus approfondi sur les transformations dans le plan, ce qui nous paraît pourtant fondamental pour mieux comprendre la nature et la richesse des nombres complexes.

Il serait toujours intéressant de travailler avec des élèves de Terminale S les transformations géométriques associées au produit complexe, car elles aideraient non seulement à visualiser ces nombres mais aussi à rendre plus concrètes leurs opérations (lesquelles se situent déjà à un niveau d'abstraction de plus en plus difficile à comprendre).

Dans notre étude historique et épistémologique sur les nombres complexes, nous avons bien rendu compte de leur essence géométrique. Si leur construction historique a même donné une réalité à la quantité négative, il n'y a pas de raison logique de ne pas enrichir leur connaissance à travers une mise en évidence visuelle de leurs propriétés géométriques ! (cf. Section 2.4.1). Dorénavant, le sens des opérations n'est plus présent dans le programme de la classe de Terminale S. Nous faisons cette remarque puisque le sens de la multiplication de nombres complexes est purement géométrique.

Nous n'allons pas nous concentrer sur les raisons qui ont motivé cette *réduction* de la géométrie en classe de Terminale S. Mais nous pouvons par contre conjecturer que, s'il y a moins de géométrie, il y a peut-être plus de calcul, plus de techniques et de mécanismes nécessaires à un élève de Terminale S par rapport non seulement aux connaissances mathématiques diverses mais aussi aux performances rendant compte de l'acquisition d'un haut niveau de raisonnement mathématique.

Quelles seraient les performances des élèves d'une classe de Terminale S dans une situation non traditionnelle d'apprentissage où il faudrait mettre en œuvre des connaissances mathématiques acquises depuis le collège ? Quelles relations pourraient-ils établir à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique entre différents registres de représentation pour interpréter géométriquement la multiplication pour différents ensembles de nombres ?

Ces conjectures, ces questions, ainsi que nos constats sur les relations entre multiplication et géométrie (associés aux résultat de notre étude de travaux épistémologiques) nous donnent déjà une idée plus concrète sur les choix didactiques dont nos propositions seront porteuses. Ces situations seront introduites à la fin de ce chapitre et développées plus en détail par la suite dans le chapitre 6.3.

3.6 Conclusion

Dans l'ensemble de l'étude portant sur les programmes du collège, le rôle des documents d'accompagnement comme un complément théorique et méthodologique des contenus énoncés dans les programmes officiels est remarquable. Par exemple, en parlant du calcul numérique, c'est spécifiquement dans ces documents que nous trouvons des références portant sur l'importance donnée au calcul appris à travers des procédures construites par les élèves. Nous y trouvons également des éléments méthodologiques associés au développement de certaines situations favorisant la construction du sens des procédures pour la résolution de problèmes et des techniques de calcul.

3.6.1 Revue de l'étude de documents d'accompagnement : des réflexions sur la richesse de notre objet mathématique

Nous avons présenté certaines situations auxquelles la notion de multiplication a été associée dans les programmes de collège. De la même manière, nous avons rendu compte de certains des principaux contenus mathématiques construits grâce à la multiplication.

Par ailleurs, même si notre intérêt dans l'étude des programmes officiels porte davantage sur le rôle de la multiplication et ses relations avec d'autres contenus mathématiques que sur les techniques de calcul, il nous semble incontournable de préciser certains éléments concernant la relation entre sens et technique étant donnée sa récurrence dans les documents étudiés :

- Tout d'abord, les justifications de la technique de la multiplication sur des fractions ont bien été développées dans le cadre numérique avec des légitimations qui peuvent faire appel aux situations concrètes, mais qui sont fortement développées à partir d'un raisonnement logique en considérant les propriétés de l'opération.
- Le produit de deux quotients est mis en relation avec le calcul d'aires et la notion de quotient, mais il est seulement défini pour son utilité sans que lui soit donnée une signification. En outre, ce produit est explicitement défini comme « une partie de… » au travers d'un langage symbolique en faisant un lien avec l'addition réitérée. Par contre, il n'y a pas de proposition qui permette un approfondissement de ce nouveau sens et qui permette en conséquence de définir la multiplication comme un opérateur entre deux espaces de mesures.
- La multiplication des nombres relatifs est justifiée à travers la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Par conséquent, la construction du sens de l'opération est privilégiée à partir d'une validation numérique.

Nous avons maintenant quelques éléments de réponse par rapport à notre question sur les conditions qui favorisent, permettent ou au contraire gênent, empêchent l'existence de situations d'apprentissage mettant en relation calcul et géométrie, pour la compréhension des objets mathématiques ainsi que pour le développement du raisonnement mathématique.

D'abord, il nous a semblé intéressant de considérer ce que les documents d'accompagnement explicitent par rapport à l'apprentissage et la compréhension du calcul :

> « Apprendre à calculer, c'est d'abord apprendre à rendre des situations accessibles au calcul par un travail de mathématisation […] Si le calcul peut et doit être objet d'étude, il intervient ainsi le plus souvent comme outil pour traiter des situations (rapport avec le réel, avec d'autres disciplines et, plus particulièrement, avec la mesure de grandeurs). » (Programmes officiels, 2007b, p. 1)

Cette assertion nous semble une condition favorable à nos attentes. Elle nous conduit, d'une part, à une réflexion sur *la façon de faire* la plus convenable pour aborder des situations liées au calcul. D'autre part, à nous questionner sur comment interpréter ces commentaires de sorte qu'ils puissent, d'une façon concrète et effective, intervenir dans l'enseignement.

D'ailleurs, « identifier les différentes situations qu'une opération permet de résoudre efficacement » (Programmes officiels, 2007b, p.8) est bien un besoin élémentaire qui permettrait de donner du sens aux opérations. De là nous dirions qu'une grande responsabilité nous a été, dans un certains sens, *dévolue* : comment faire pour que les élèves puissent identifier les situations où intervient la multiplication, et que cette reconnaissance soit effective grâce à la compréhension du contenu en jeu ? Cette compréhension devrait donc être produite à partir des situations d'enseignement conçues spécialement pour répondre à ces propos, en considérant que le sens des opérations consiste à comprendre *pour quoi* une opération mathématique rend possible la résolution d'un problème déterminé. Ceci nous ramène à nos réflexions élaborées au sein de notre étude de travaux épistémologiques. Il faut, bien sûr, ne pas perdre de vue que les opérations mathématiques sont plutôt *un outil* au service du calcul pour la résolution de problèmes qu'un objet d'étude. Mais la mise en relation des analyses épistémologiques et didactiques permet que les objets mathématiques se *déprennent* de leur simplicité (Artigue & Robinet, 1982) et que soit exploitée la richesse de certains contenus mathématiques dans le but de favoriser leur compréhension et le développement du raisonnement mathématique :

> "If learners were more explicitly aware of the images and metaphors that are invoked in multiplicative situations, [...] its is much more likely that they will appreciate that the concept of multiplication is something more that a set of facts to be memorized or a bit of procedural knowledge to be mastered. [...] Having explicit acces to such metaphorical underpinings would likely enable students to better understand why multiplication is useful in such a diversity – and, in the process, to perhaps reduce the tendency of learners to classify practice tasks as "adding question", "multiplying questions", and so on (i.e. technical applications), as opposed to exercises in thinking through the underlying features and processes of mathematical situations." (Davis & Simmt, 2006, p.302)

Finalement, au cours de cette étude, nous avons identifié que la compréhension du *pourquoi* la multiplication rend possible la résolution de certains problèmes mathématiques n'a pas seulement une relation directe avec le sens de la multiplication elle-même mais aussi avec le sens d'autres objets mathématiques qu'elle aide à construire. Ceci participe à la richesse de notre objet mathématique. Ainsi, dans les programmes de collège, et notamment dans les documents que nous avons étudiés, la multiplication sert : – à construire une droite graduée ; – à opérer sur les grandeurs et à en construire des nouvelles ; – à donner du sens à l'écriture fractionnaire en donnant du sens à des représentations géométriques ; – à construire le sens du produit de deux nombres décimaux ; – à justifier la technique de la multiplication de deux nombres décimaux en utilisant la mesure d'aires ; – à résoudre des situations de proportionnalité ; – à interpréter, principalement dans un cadre numérique, des relations d'agrandissements et de réductions. Compte tenu de ce qui précède, au sein d'une situation didactique, une mise en relation serait possible non seulement entre calcul et géométrie mais aussi entre calcul et grandeurs ou entre des éléments différents d'un même cadre mathématique.

3.6.2 Des programmes officiels à la compréhension et à l'appropriation de connaissances mathématiques

Il convient maintenant de réfléchir plus en profondeur aux conditions qui favorisent la mise en place de situations mettant en relation différents cadres mathématiques pour favoriser la compréhension des connaissances mentionnées ci-dessus. Si ces connaissances ont été travaillées à travers plusieurs situations favorisant leur compréhension, elles devraient être aussi mobilisables dans d'autres situations portant sur ces mêmes connaissances, même si celles-ci ne font pas appel à des mécanismes résultant d'un entraînement. D'après notre étude, les programmes insistent sur le fait de bien développer les "capacités d'expérimentation et de raisonnement" des élèves (Programmes officiels, 2008, p. 9). Néanmoins, à travers l'organisation du programme en connaissances, capacités et commentaires, il nous semble que les efforts sont concentrés sur l'apprentissage de la technique et sur la construction du sens du calcul à travers ses propriétés. À travers cette *dévolution* dont nous avons déjà parlé, une grande responsabilité est laissée aux enseignants dans l'interprétation de ce qui est la compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques par les élèves.

Pour nous, la possibilité de résoudre des problèmes ne peut pas être seulement le résultat d'une expertise concernant l'utilisation de techniques : ceci sert à cela, et cela sert à… Nous retrouvons cette position dans les programmes :

> "La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir les 'outils', c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles." (Programmes officiels, 2008, p. 10)

Il ne faut pas croire que le renforcement des techniques constitue le cœur des mathématiques, ou plus précisément, le cœur de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Les stratégies pour l'apprentissage des techniques ne sont qu'un point d'entrée dans la découverte ou l'assimilation de notions nouvelles et dans la compréhension d'un même outil mathématique en tant qu'objet d'étude.

La proposition de situations didactiques (Brousseau, 1998) qui permettent la mise en œuvre de techniques et qui favorisent l'autonomie des élèves dans l'action et la mise en place de connaissances, fait, depuis longtemps, partie du système didactique français. Néanmoins, en dehors du cadre concernant la recherche et les expérimentations didactiques associées, nous voudrions insister sur l'importance d'une présence plus explicite au sein des programmes officiels d'exemples de situations de recherche qui permettent aux élèves de réfléchir sur les objets mathématiques, par eux mêmes et sous le guide d'un enseignant médiateur (cf. Section 4.3.4), à travers la mise en relation de différents cadres et registres de représentation sémiotique (Duval, 2006b). En effet, nous nous intéressons non seulement à l'acquisition des connaissances mathématiques nécessaires pour obtenir le Baccalauréat (Dorier, 1997), mais aussi au développement de la pensée mathématique et à la compréhension des objets mathématiques dont une manipulation sémiotique serait porteuse :

> " 'True' understanding must involve something that goes beyond the operative ability of solving problems and of proving therorems." (Sfard, 2008, p.29)

3.6.3 Une situation d'apprentissage qui résulte des réflexions épistémologiques et didactiques

Nous faisons l'hypothèse que si les connaissances mathématiques acquises par les élèves sont le résultat d'un entraînement à la mécanique des techniques pour la résolution de problèmes de calcul, la compréhension de ces contenus risque de ne pas se produire : " 'I didn't understand anything ! I did what I did but I don't know why it worked' " (Sfard, 2008, p.28).

D'une part, grâce aux résultats obtenus dans notre étude de travaux historiques et épistémologiques (cf. Chapitre 2) nous avons été orientés d'une façon plus concrète vers l'élaboration d'une proposition didactique au lycée et au collège en France. Comme nous l'avons déjà mentionné, nos interventions didactiques visent l'analyse d'un Espace de Travail Mathématique dans lequel nous voudrions déterminer les possibilités pour les élèves d'établir un lien entre multiplication et géométrie pour différents ensembles de nombres. Plus particulièrement, nous nous intéressons à l'interprétation du sens de la multiplication en géométrie pour les nombres rationnels, les nombres relatifs et les nombres complexes à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2012) conçu spécialement pour répondre à nos intentions didactiques (cf. Section 6.3).

Pour cela, et étant donnés nos choix méthodologiques et les composantes théoriques de nos situations expérimentales (cf. Chapitre 6), nous nous sommes intéressés aux connaissances associées à l'apprentissage de la multiplication institutionnellement visées au collège et au lycée (notamment en classe de Terminale S), puisque c'est là, comme nous l'avons déjà mentionné, que des nouveaux nombres sont intégrés à l'enseignement et apprentissage des mathématiques.

De ce fait, la mise en place de ces situations expérimentales aura lieu dans un premier temps en classe de Terminale S, puisque le lien entre produit et géométrie est justifiable théoriquement à ce niveau de l'enseignement. Dans un deuxième temps, et sous des conditions différentes (changement de certaines variables), une expérimentation sera aussi menée en classe de Quatrième.

D'autre part, nous nous sommes intéressés aux possibilités données par l'institution en question, de mettre en place des situations d'apprentissage favorisant la recherche, la découverte et la construction du sens des objets mathématiques par les élèves. L'ouverture théorique que nous avons trouvée en réponse à notre questionnement justifie notre proposition d'expérimentation d'une séquence d'apprentissage, à travers laquelle, nous voudrions :

- évaluer l'évolution des connaissances acquises par les élèves à un moment déterminé de l'enseignement (au collège) ;
- déterminer les interactions entre les composantes cognitive et épistémologique d'un Espace de Travail Mathématique rendant compte de la compréhension des objets mathématiques en jeu ;
- identifier et étudier le raisonnement conduisant les élèves à la résolution des questions posées tout au long de la séquence.

Il faut finalement souligner que notre proposition didactique ne s'inscrit pas dans le cadre traditionnel de l'enseignement français. Notre démarche vise effectivement à promouvoir non seulement un traitement non particulier d'un objet mathématique mais aussi une façon d'interpréter l'enseignement des mathématiques.

D'une part cette interprétation se traduit par une connaissance de la signification et de l'essence des relations entre différents objets mathématiques, dans notre cas, les nombres, la multiplication, leurs significations et la géométrie. D'autre part, et dans un sens méthodologique, elle se traduit par une conception de l'enseignement des mathématiques qui ne peut pas exclure la présence de médiateurs (Radford, 2003b), laquelle ne se limite pas à la seule intervention des représentations sémiotiques. Radford (2003b) le souligne en se référant aux remarques faites par Kant (1781-1996) par rapport au rôle des représentations, " the only way that an object can be given to us is by the mind being affected in a certain manner – in a sensible manner, by representations of the object (see (Kant, 1781-1996, p.71-72))" (Radford, 2003b, p. 40). Puis il rajoute qu'il faut ne pas se limiter à la prise en compte de représentations sémiotiques quand il s'agit de la production et de la compréhension d'une connaissance mathématique [1] à l'intérieur d'un système de médiation et de réflexion :

1. Voir objectivation dans (Radford, 2003b ; Charlton, 1996)

"In starting this, I do not want to minimize the pedagogical and epistemological role of representations. The colossal importance that we ascribe to writing in our culture (an importance that, not long ago, still surprised several tribes such as those visited by Lévi-Strauss (1962), and Evan-Pritchard (1937), and would have surprised the Pythagoreans of 6th century B.C., committed as they were to the oral practice of mathematics makes futile any claim of that sort [...]. The point is that processes of knowledge production are embedded in systems of activity that include other physical and sensual means of objectivation than writing (like tools and speech) and that give a corporeal and tangible form to knowledge as well. [...]the objectivation of mathematical objects appears linked to the individuals' mediated and reflexive efforts aimed at the attainment of the goal of their activity." (Radford, 2003b, p. 41)

Chapitre 4

Une intégration théorique pour l'analyse des composantes de notre problématique

4.1 Introduction : des enjeux cognitifs à l'intérieur d'un espace de travail mathématique

Quand nous réfléchissons aux liens entre la multiplication, ses significations et la géométrie, nous nous situons dans le plan d'une mise en relation, à travers la géométrie, entre les différentes significations de cet objet mathématique appelé multiplication. La géométrie, étant un élément intermédiaire entre multiplication et ses significations, nous a amenés à l'étude des enjeux cognitifs permettant la mise en relation de ces différents éléments. *A priori*, nous attribuons aux représentations géométriques le rôle d'un corpus sémiotique à traiter et à convertir en fonction des significations de notre objet d'étude, dans le processus cognitif visant sa compréhension. Plusieurs exemples pourraient servir de modèle ou de justification de notre assertion. Néanmoins, et juste pour ne pas rester nous mêmes dans l'*abstraction* de nos idées, un exemple qu'il nous semble pertinent de mentionner et qui justifie l'importance des représentations géométriques pour la compréhension des objets mathématiques représentés dans un autre cadre mathématique, a été donné par Arcavi (2003) dans son *The role of visual representations in the learning of mathematics* :

"Consider, for exemple, the mediant property of positive fractions : $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Flegg, Hay and Moss (1985, p.90) attribute this 'rule of intermediate numbers' to the French mathematician Nicolas Chuquet, as it appears in his manuscript LA Triparty en la Science des Nombres (1984). The symbolic proof of this property is quite simple, yet it may not be very illuminating to students. Geord Pick (1859-1943 ?) an Australian-Czech mathematician wrote 'The plane lattice… has, since the time of Gauss, been used often for visualization and heuristic purposes… [in this paper] an attempt is made to put the elements of number theory, from the very begining, on a geometrical basis' (free translation from the original German in Pick, 1899). Following Pick, we represent the fraction $\frac{a}{b}$ by the lattice point (b, a). The reason for representing $\frac{a}{b}$ by (b, a) and not (a, b), is for visual convenience, since the slope of the line from the origin O to (b, a) is precisely $\frac{a}{b}$, and hence fractions arranged in ascending order of magnitud are represented by lines in ascending order of slope. Visually, the steeper the line the larger the fraction. (Note also that equivalent fractions are represented by points on the same line through the origin. If the lattice point P represents a reduced fraction, then there are no lattice points between O and P on the line OP). Now, the visual version of the mediant of $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, which is $\frac{1+4}{3+5}$, is represented by the diagonal of the parallelogram 'defined' by $\frac{1}{3}$ and $\frac{4}{5}$. The same holds in general for $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. I would claim that the 'parallelogram' highlights the simple idea of betweeness and also the reason for the property, and thus it may add meaning and conviction to the simbolic proof. In this example, we have not only represented the fraction $\frac{a}{b}$ visually by the point with coordinates (b, a) - or the line from the origin through (b, a) - but capitalized on the visualization to bring geometry to the aid of what seem to be purely symbolic/algebraic properties. Much mathematics can be done on this basis". (Arcavi, 2003, p.220-221)

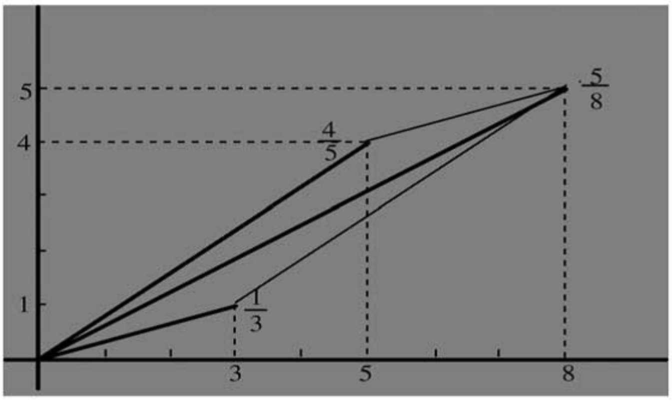


Figure 4.1 – Représentation géométrique de la *mediant* de $\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{5}$ (Arcavi, 2003)

D'ailleurs, en suivant Presmeg (2006), nous avons quelques mots à rajouter puisque nous parlons de visualisation. En soulignant l'importance des travaux de Raymond Duval, cette auteure explicite l'existence de connections importantes entre ce qu'elle appelle *"visual and symbolic inscription"* (Presmeg, 2006, p. 221) : he "posits the connections both within and amongst different representational registers as absolutely fundamental to deep understanding of mathematics" (Presmeg, 2006, p. 221).

Juste pour approfondir un peu plus sur la complexité de *ces connections*, d'après Raymond Duval, les fonctions cognitives associées à la visualisation et aux représentations ont un fort impact dans la pensée mathématique : "representation and visualization are at the core of understanding in mathematics" puis il rajoute,

> "from a learning point of view, visualization, the only relevant cognitive modality in mathematics, cannot be used as an immediate and obvious support for understanding [...] We cannot deal anyway with a representation without taking into account the system in which it is produced". (Duval, 1999, p.3-5)

De ce fait, parler de visualisation et de représentations pour l'apprentissage-enseignement des mathématiques doit prendre en compte le développement de plusieurs systèmes sémiotiques qui ont fait partie, historiquement, du progrès en mathématiques et qui ont leur fondement dans des différents systèmes sensoriels : le langage et l'image (Duval, 1999) :

> "For exemple, symbolic notations stemmed from written language have led to the algebraic writing and, since the nineteenth century, to the creation of formal languages. For imagery, there was the construction of plane figures with tools, then that in perspective, then the graphs in order to 'translate' curves into equations. Each new semiotic system provided specific means of representation and processing for mathematical thinking. For that reason, we have called them 'register of representation' (Duval, 1995b). Thus, we have several registers for discursive representation and several systems for visualization. That entails a complex cognitive interplay underlying any mathematical activity". (Duval, 1999, p. 4-6)

De ce fait, en donnant un contexte et en prenant en compte la complexité cognitive où se situent les représentations et la visualisation par rapport à l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, nous faisons l'hypothèse suivante : les représentations géométriques répondent bien à un système de représentation sémiotique complémentaire du système numérique et algébrique mobilisant des variables cognitives complexes qui peuvent favoriser la compréhension d'un objet mathématique.

Par ailleurs, nous avons conscience que l'abstraction des concepts algébriques et arithmétiques provient du fait qu'ils ne sont représentés qu'à travers un schéma symbolique (Radford, 2003) :

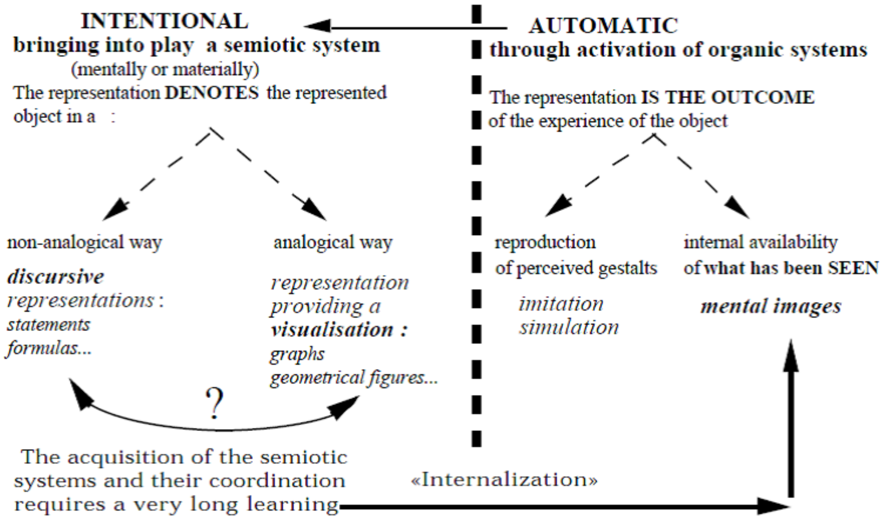


Figure 4.2 – Classification cognitive de *conscious representations* (Duval, 1999, p.6)

> "They express concepts without employing a direct intuition for the purpose, but only drawing upon an analogy with one, i.e., transferring the reflection upon an object of intuiton to quite a new concept, and one with which perhaps no intuition could ever directly correspond ". (Kant, 1790, S59, p.148)

Cela correspond bien à ce que Piaget appelait un *signe*, lequel « bears an arbitrary or non-motivated relationship to its signified » (Radford, 2003, p.5). De ce fait, un intermédiaire, autre ces signes *représentants*, entre une conception et sa compréhension ou bien l'accès à ses significations, nous semble toujours nécessaire : comme nous l'avons déjà mentionné… « there is not mathematical thinking without using semiotics representations » (Duval, 2008, p. 1). C'est la raison pour laquelle nous nous appuyons principalement sur des cadres théoriques didactiques contenant un haut degré de considération des aspects cognitifs et sémiotiques dans le processus d'apprentissage-enseignement.

De ce fait, cette recherche ayant comme point de départ une étude de travaux historico-épistémologiques et didactiques portant sur les relations entre calcul numérique et géométrie, se focalise dans un deuxième temps sur un contexte d'enseignement collège-lycée où notre hypothèse et tous les aspects la constituant seront analysés relativement à certaines approches théoriques qui répondent à nos intérêts didactiques et cognitifs.

Compte tenu de ce qui précède, notre principale approche théorique concerne les travaux d'Alain Kuzniak portant sur l'Espace de Travail Géométrique (ETG) (Kuzniak, 2004, 2011) et notamment sur la mise en relation des plans cognitif et épistémologique constituant, plus largement, un Espace de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2012).

L'articulation des processus cognitifs définis par Duval (1998) avec les composants du plan épistémologique d'un ETG rend compte d'une relation bilatérale entre les éléments constituant les deux plans d'un ETM, grâce à l'action d'éléments sémiotiques, dans les différents processus d'apprentissage d'un contenu mathématique. De ce fait, nous nous intéressons à l'analyse de cette relation bilatérale, en vue de la caractériser selon sa nature, ce qui nous permettra d'élargir notre domaine de connaissance théorique des espaces de travail mathématique. Cette nouvelle connaissance favorisera ainsi la création d'outils d'analyse qui nous permettront, dans le terrain expérimental, de différencier les interactions produites entre les deux plans d'un Espace de Travail Mathématique pour la détermination et la classification de parcours d'action de différents individus. Ces actions se produiront au milieu d'une situation expérimentale qui vise la mise en œuvre de connaissances mathématiques anciennes, l'interprétation géométrique d'un objet mathématique, l'analyse des représentations géométriques, un travail collaboratif et la mise en fonctionnement d'un raisonnement déductif à l'intérieur d'une situation non traditionnelle d'apprentissage.

Pour enrichir notre analyse, il est nécessaire de prendre en compte d'autres approches théoriques qui doivent être intégrées à la conception et à l'étude des espaces de travail mathématique idoines et personnels (cf. Section 4.2).

Ainsi, la dialectique outil-objet et notamment les jeux de cadres de Douady (1986) interviennent dans la conception et dans l'analyse de différentes activités que nous avons proposées aux élèves. En conséquence, ces activités s'intègrent à la conception d'un ETM idoine qui devrait promouvoir des interactions entre différents cadres mathématiques.

En outre, en prenant en compte notre intérêt spécifique à la genèse sémiotique à l'intérieur d'un espace de travail mathématique, les limitations de l'approche sémiotique déjà existante ainsi que la délimitation théorique donnée aux artefacts au sein de l'approche de l'Espace de Travail Géométrique nous ont amenés à la recherche d'autres approches théoriques portant sur la médiation sémiotique et sur la construction sociale de connaissances mathématiques. Pour cela, et comme nous l'avons déjà mentionné, nous allons travailler notamment concentrés sur les travaux de Bartolini Bussi et Mariotti (2008) concernant la Théorie de la Médiation Sémiotique ainsi que sur certaines réflexions associées à la construction sociale de connaissances mathématiques et à la complexité du processus de compréhension d'un objet mathématique de Radford (2000, 2004) et Sfard (2008). Comme nous le développerons dans la section 5

(Méthodologie d'analyse), ces nouvelles approches s'intégreront à l'analyse *a priori* et *a posteriori* de notre situation expérimentale laquelle a été brièvement mentionnée ci-dessus.

Bien sûr, l'espace de travail mathématique s'intègre lui même à une relation avec le *milieu* définit par Brousseau (1998) : « nous pouvons dire que lorsqu'un problème ou une situation géométrique sont donnés à un individu, il se crée de fait une interaction entre un milieu et l'individu. L'interprétation et la représentation du problème pour sa résolution entraînent l'entrée dans un paradigme géométrique puis le recours à un ETG dont la nature peut dépendre de l'utilisateur » (Kuzniak, 2004, p. 30). De ce fait, l'étude et l'analyse des nos séances d'apprentissage, notamment tout ce qui concerne ce *milieu* expérimental que nous allons mettre en place, le contrat didactique, les analyses *a priori* et *a posteriori*, seront bien pris en compte en tant qu'éléments d'analyse de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998).

4.2 L'espace de travail mathématique

Nous allons spécifiquement étudier le processus de mise en relation entre multiplication et géométrie [1] là où il se produit, où il est censé d'émerger. Nous allons nous situer là où se déploie la pensée mathématique dont parle Piaget, à l'endroit où nous pouvons voir en action le travail mathématique associé à l'œuvre du mathématicien (Kuzniak, 2010).

C'est dans l'Espace de Travail Mathématique et notamment l'Espace de Travail Géométrique (ETG) défini par Kuzniak que nous allons analyser la géométrisation de la multiplication en étudiant les interactions entre les deux niveaux le constituant — le plan des composantes et le plan cognitif (Kuzniak, 2010) — , comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction à cette section.

Le premier plan de l'ETG, aussi appelé plan épistémologique pour des raison concernant l'étude et l'organisation de ses éléments, « se structure avec la mise en réseau des trois composantes suivantes :

- un espace réel et local avec un ensemble d'objets de nature sensible ;
- un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments utilisés par le géomètre ;
- un référentiel théorique constitué de propriétés » (Kuzniak, 2010, p. 4).

1. Processus de géométrisation. Cf. chapitre 1

Ces composantes, comme le souligne Kuzniak, ne suffisent pas à définir l'espace de travail étant donné que,

> « le sens de l'espace de travail va dépendre de la fonction que son concepteur et ses utilisateurs lui attribuent. Une première réorganisation de ces différentes composantes [mentionnés ci-dessus] sera plutôt de nature épistémologique et son orientation sera guidée par les paradigmes géométriques [2] mis en jeu. Le paradigme de référence permet d'interpréter les contenus des composantes et de les structurer dans le sens souhaité ». (Kuzniak, 2010, p. 4)

Dans la deuxième partie de cette section, nous allons approfondir certains aspects associés au lien paradigme-ETG pour clarifier leur contenu et la façon dont ces différents paradigmes peuvent intervenir dans le fonctionnement d'un espace de travail mathématique.

En suivant cette présentation de l'ETG, nous devons aussi décrire le deuxième plan le constituant, ce qui nous permet de prendre conscience de l'existence d'une composante fondamentale de tout espace de travail mathématique : sa dimension cognitive (Kuzniak, 2010), laquelle est structurée autour des processus de « visualisation, construction et preuve » (Duval, 1998). Ces processus ont été introduits par Raymond Duval en accord avec son approche cognitive sur les registres de représentation sémiotique intervenant dans l'ETG, à travers les relations existantes entre le registre figural et le registre discursive dont nous y reviendrons plus tard.

Par ailleurs, l'approche théorique de Kuzniak différencie trois espaces de travail géométriques, dont le premier correspond à *l'ETG de référence* énoncé aussi par Kuzniak, comme *la réorganisation attendue* :

> « Le fait pour une communauté d'individus de s'accorder sur un paradigme donné pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines manières de pensée, débouche sur ce que nous conviendrons d'appeler l'ETG de référence. Pour connaître cet ETG, il faudra dégager ces manières de faire et de voir en décrivant notamment le style du travail géométrique avec ses règles de discours, de traitement et de présentation. Cet ETG dépendra du paradigme privilégié : Géométrie I, ou II ou III ». (Kuzniak, 2010, p. 5)

L'aménagement et réorganisation, par des experts, de l'ETG de référence donnera lieu à un nouvel espace de travail, celui que Kuzniak introduit comme un ETG effectif ou idoine

2. Trois géométries élémentaires. Kuzniak 2004.

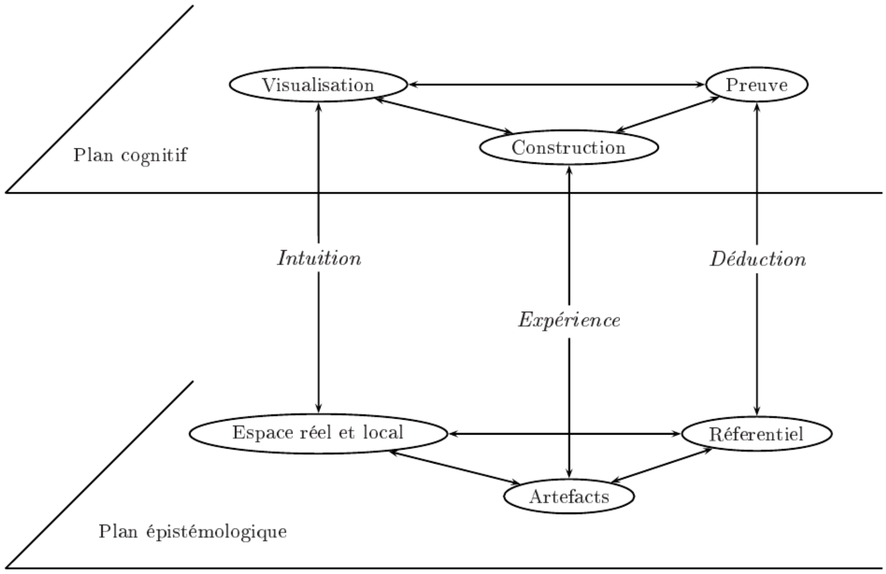


Figure 4.3 – L'Espace de Travail Géométrique

dans une institution donnée. Cet espace de travail aura une fonction définie dans l'institution à laquelle il appartient, il va respecter les demandes institutionnelles mais son existence ne peut viser que des utilisateurs potentiels. Le risque de ne pas être adéquat est donc une réalité. Ainsi, *l'ETG idoine*, ou l'endroit où les questions de la *didactisation* se posent, a ses fondements sur les bases de la géométrie enseignée :

> « Il reste à se préoccuper de son enseignement effectif qui nécessite l'existence d'un espace propice à l'enseignement réussi de la géométrie souhaitée. Cette réussite dépendra naturellement aussi des utilisateurs de cet espace mis en forme pour eux : les élèves bien sûr mais aussi les professeurs chargés de le mettre en place dans les classes » (Kuzniak, 2010, p. 5-6).

Il ne nous reste donc qu'à définir *les ETG personnels*, là où les ETG idoines,

> « doivent être investis par des élèves qui se les approprient avec leurs connaissances et leur fonctionnement cognitif particuliers [...]. Ils se constituent de manière progressive et peuvent n'être parfois pas opérationnels. La notion d'ETG personnel ne concerne pas les seuls élèves et étudiants, mais elle concerne aussi les professeurs. En effet, ces derniers doivent avoir une conscience claire de la nature des espaces de travail géométrique idoines afin d'éviter les malentendus résultants d'une gestion floue et implicite du jeu entre les paradigmes ». (Kuzniak, 2010, p. 6)

4.2.1 Les paradigmes géométriques

Il est très important de décrire les éléments clés de cette approche théorique, c'est-à-dire ceux qui vont intervenir d'une façon directe dans les analyses le plus fines dont nous rendrons compte tout au long de cette recherche. De ce fait, l'espace de travail mathématique, inspiré et essentiellement structuré à partir des Espaces de Travail Géométriques (Kuzniak, 2011, p. 10), est au cœur de nos analyses puisque c'est là où se produisent les interactions entre un individu (potentiel ou réel), les problèmes géométriques et, dans notre cas, les problèmes mathématiques : « ces problèmes sont abordés à l'intérieur d'une certaine vision paradigmatique (la géométrie mise en jeu) qui impose à la fois ses modes d'appréhension et ses modes de traitement du problème ». Comme nous l'avons déjà mentionné, l'articulation des éléments constituant l'ETG se précise en fonction du paradigme géométrique mis en jeu.

Notre approche théorique principale définit ce qu'est un paradigme, inspiré de la conception développée par Kuhn (1962) dont Kuzniak prend deux aspect principaux. Le premier d'entre eux correspond à l'aspect global du mot paradigme qui « désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique » (Kuzniak, 2004, p. 20). Le deuxième aspect se situe, d'après Kuzniak, dans une perspective d'enseignement en caractérisant « les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaitre, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global » (Kuzniak, 2004, p. 21).

Ainsi, la prise de conscience des ruptures entre paradigmes, les controverses associées au passage d'un paradigme à un autre, les travaux de Gonseth et Kuhn, ainsi qu'une interprétation épistémologique associée non seulement à la géométrie mais aussi à sa transmission scolaire, donnent comme résultat une vision de la géométrie élémentaire séparée en trois paradigmes distincts associés aux trois modes de pensée : l'intuition, l'expérience et la déduction (cf. Figure 4.3).

Nous allons donc donner certaines caractéristiques de chacun des paradigmes géométriques en prenant en compte les aspects essentiels présentés par Kuzniak (2012), et qui rendent essentiellement compte des interactions entre différents modes de pensée, réalité, figures et propriétés géométriques.

La Géométrie I : la géométrie naturelle

> "Natural Geometry has the real and sensible world as a source of validation. In this Geometry, an assertion is supported using arguments based upon experiment and deduc-

tion. Little distinction is made between model and reality and all arguments are allowed to justify an assertion and convince others of its correctness. Assertions are proven by moving back and forth between the model and the real : The most important thing is to develop convincing arguments. Proofs could lean on drawings or observations made with common measurement and drawing tools such as rulers, compasses and protractors. Fold or cutting the drawing to obtain visual proofs is also allowed. The development of this geometry was historically motivated by practical problems. The perspective of Geometry I is of a technological nature". (Kuzniak, 2012, p. 3)

La Géométrie II : la géométrie axiomatique naturelle

> "Geometry II, whose archetype is classic Euclidean Geometry, is built on a model that approaches reality. Once the axioms are set up, proofs have to be developed within the system of axioms to be valid. The system of axioms could be incomplete and partial : The axiomatic process is a work in progress with modelling as its perspective. In this geometry, objects such as figures exist only by their definition even if this definition is often based on some characteristics of real and existing objects. Both Geometries have a close link to the real world even if it is in different ways". (Kuzniak, 2012, p. 3)

La Géométrie III : la géométrie axiomatique formaliste

> "To these two approaches, it is necessary to add a third Geometry (Formal Axiomatic Geometry) which is little present in compulsory schooling but which is the implicit reference of teachers' trainers when they have studied mathematics in university, which is very influenced by this formal and logical approach. In Geometry III, the system of axioms itself, disconnected from reality, is central. The system of axioms is complete and unconcerned with any possible applications in the world. It is more concerned with logical problems and tends to complete "intuitive" axioms without any "call in" to perceptive evidence such as convexity or betweenness. Moreover, axioms are organized in families which structure geometrical properties : affine, euclidean, projective, etc". (Kuzniak, 2012, p. 3)

Nous avons encore à rajouter que ces trois géométries ne se trouvent pas dans une espèce d'isolement. Des enjeux entre elles se sont produits dans les différentes situations déjà étudiées par Kuzniak et Houdement (2006) ainsi que tout au long du développement de cette approche théorique. De ce fait, nous allons voir plus tard comment une intégration entre deux des trois paradigmes géométriques présentés ci-dessus s'est aussi produite dans nos propositions didactiques au collège et au lycée.

4.3 Intégration à l'Espace de Travail Mathématique de nos approches théoriques complémentaires

4.3.1 Espace de Travail Mathématique et jeux de cadres

En parlant des objets mathématiques,

> « nous disons qu'un concept est *outil* lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut-être *adapté* à plusieurs problèmes et plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par *objet*, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement ». (Douady, 1986, p. 9)

D'après Régine Douady :

> « Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans leur fonctionnement comme outils, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et les problématiques associées. [...] Nous concevons la notion de cadre comme une notion dynamique. Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation ». (Douady, 1986, p. 11)

L'intégration de certains éléments de cette approche à l'ETM nous semble indispensable étant donné que nous nous situons, dès le début de cette recherche, dans une situation où la mise en relation entre le cadre géométrique et les cadres numérique et algébrique s'est naturellement établie à travers la recherche d'un lien entre multiplication et géométrie. Notre intérêt d'établir cette relation dans un contexte d'apprentissage-enseignement nous amène à introduire des éléments concernant les jeux de cadres dans nos propositions didactiques.

L'originalité des séquences ou des situations répondant à l'organisation de moments « où *la classe simule une société de chercheurs en activité* » (Douady, 1986, p. 12) doit nécessairement être prise en compte dans nos propositions sachant même que cela sort de la méthode traditionnelle utilisée dans la pédagogie courante « j'apprends, j'applique » (Douady, 1986). Un haut degré de responsabilité doit donc être donné aux élèves pour qu'ils puissent, d'une part, mettre en évidence leurs connaissances mathématiques en faisant appel aux outils appropriés à la résolution du (des) problème(s) donné(s) et, d'autre part, reconnaitre et interpréter un objet mathématique dans un cadre différent de celui où jusqu'à ce moment là, il a été habituellement traité.

De ce fait, pour la proposition d'un Espace de Travail Mathématique intégrant cette approche théorique il faudra bien la mise en place d'une organisation didactique qui permette de construire « un enseignement différent, restituant leur sens aux outils que les élèves mettent en œuvre, tout en assurant une présentation institutionnelle aux objets correspondants » (Douady, 1986, p. 12). Ainsi, la formulation des problèmes constituant l'ETM à proposer devrait répondre aux conditions suivantes :

- L'énoncé (contexte et questions) doit avoir du sens pour les élèves de sorte qu'avec leurs connaissances ils puissent s'engager dans une procédure de résolution mais non aboutir ;
- les connaissances visées par l'apprentissage (contenu ou méthode) doivent être des outils adaptés au problème ;
- le problème doit pouvoir se formuler au moins dans deux cadres différents (Douady, 1986).

4.3.2 Espace de Travail Mathématique et registres de représentation sémiotique

> « Le changement de statut de la figure est un des points le plus visibles dans l'évolution de l'ETG [...]. Le jeu sur la figure s'articule aussi sur la liaison espace - modèle dans l'ETG et donc sur la relation entre le spatial et le théorique : préciser la gestion de cette interaction est l'objet et l'approche cognitive de Duval » (Kuzniak, 2004, p. 35).

De cette façon nous introduisons cette mise en relation, cette intervention faite par Raymond Duval dans l'Espace de Travail Géométrique dont nous avons déjà parlé : l'existence des interactions entre le registre figural et le registre discursif. De ce fait, l'approche cognitive de Duval a été superposée à l'ETG en réorganisant « des processus cognitifs associés aux diverses composantes de l'ETG » (Kuzniak, 2004, p. 35). Cette superposition constitue aujourd'hui le plan cognitif de l'Espace de Travail Géométrique et, même plus généralement, de l'Espace de Travail Mathématique. Ainsi, les composantes du plan cognitif — visualisation, construction et preuve — ont été mis en relation non seulement entre eux mais aussi avec chaque composante du plan épistémologique à travers l'intervention des intermédiaires appelées *genèses*.

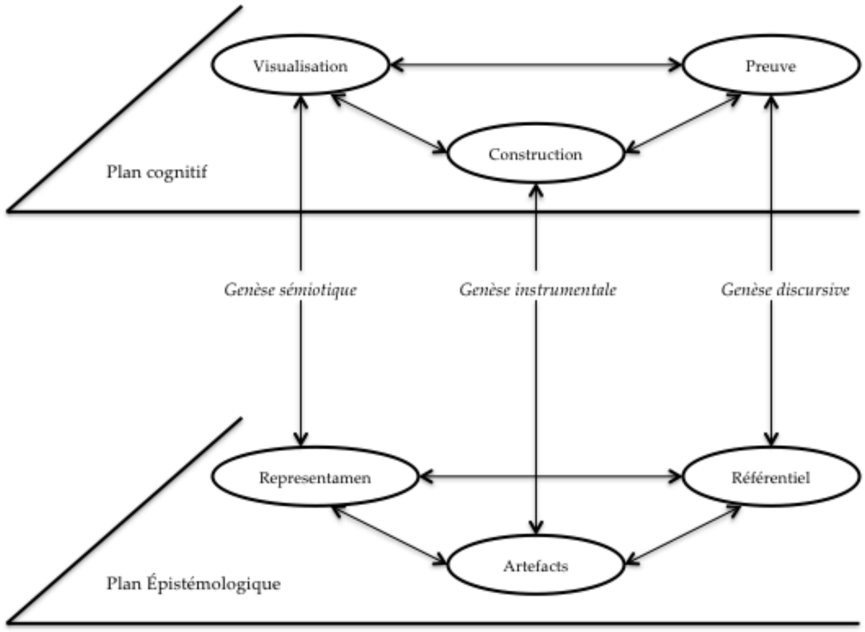


Figure 4.4 – L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction à ce chapitre, l'articulation entre les deux plans de l'ETG et de l'ETM consiste en une mise en relation bilatérale entre leurs composantes. Pour mieux comprendre ces relations ainsi que leur articulation avec les registres de représentations sémiotique, il faut comprendre, indépendamment de l'ensemble du fonctionnement de l'Espace de Travail Mathématique, le fonctionnement local du plan épistémologique et du plan cognitif.

Si nous observons le schéma représentant l'Espace de Travail Mathématique dans la figure 4.4, nous avons, par exemple, que l'*espace réel* peut être en relation avec les artefacts ou avec le référentiel théorique, et qu'existe la possibilité qu'il soit en lien avec les deux en même temps. Dans ce cas, on dira que ce n'est pas seulement l'espace réel qui est en relation à travers la genèse figurale à travers le processus cognitif de *visualiser*, mais toutes les composantes du plan épistémologique. Ceci fonctionnera de la même manière pour les autres processus cognitifs en jeu. De même, dans le plan cognitif, ce sont la visualisation, la construction et la preuve, qui peuvent, à leur tour, faire partie tous ensemble du processus de genèse figurale mettant en action les composantes du plan épistémologique.

Par ailleurs, l'articulation des deux plans d'un espace de travail mathématique peut avoir des natures différentes tout en dépendant de son origine, point de départ ou genèse. D'un point de vue plus classique, le point de départ de cette articulation se trouverait prioritairement au niveau épistémologique : par exemple, la visualisation d'un objet mathématique *abstrait* dans un espace réel ou matériel peut sans doute être le produit d'une manipulation d'artefacts dans la construction d'une figure. Néanmoins, l'action des composantes du plan épistémologique, peut bien être déclenchée par des besoins du niveau cognitif. De ce fait, une construction avec des artefacts peut répondre à un besoin de prouver ; la construction d'une figure dans un environnement papier-crayon, peut bien être le résultat d'une visualisation préalable permettant de transférer certaines propriétés à une nouvelle configuration, ou bien, une façon de faire appel à une preuve.

C'est dans ces processus articulant les deux plans d'un ETM appelés genèses, que nous pouvons préciser, non seulement l'existence, mais aussi les permanentes interactions entre différents registres de représentation sémiotique. En outre, à partir des exemples donnés ci-dessus, nous avons une compréhension plus vaste de cette genèse sémiotique qui ne concerne pas seulement une relation verticale entre un espace réel et une visualisation, mais une interaction qui peut aussi intégrer les deux plans de l'Espace de Travail Mathématique dans sa totalité : nous pouvons passer de la preuve à la construction en faisant appel à un changement de registre de représentation (entrée cognitive) ; une configuration géométrique, un signe ou *representamen* (Kuzniak, 2011) peut bien déclencher une visualisation (action cognitive) qui fera appel aux propriétés et aux axiomes (action épistémologique) permettant de produire une preuve. Comme le souligne Duval : "mathematical objects are never accessible by perceptions or by instruments" (Duval, 2006a, p. 107). Ainsi, si nous nous situons dans un espace de travail mathématique, où l'enjeu principal ne consiste qu'en la compréhension d'un objet mathématique quelconque, nous ne pouvons échapper ni à la présence de représentations sémiotiques, ni aux interactions entre elles.

Registres de représentation sémiotique et métaphores : une entrée cognitive dans l'Espace de Travail Mathématique

Compte tenu des exemples mentionnés ci-dessus concernant les actions permanentes entre les différents registres de représentation sémiotique, des actions qui favorisent les interactions entre les composantes des plans cognitif et épistémologique, nous voudrions, en particulier, souligner la possibilité d'une entrée cognitive à l'Espace de Travail Mathématique. Par exemple, cette entrée cognitive pourrait être déclenchée grâce aux effets produits par la visualisation d'un objet mathématique représenté dans un cadre géométrique. Cette visualisation serait le produit d'une interprétation métaphorique de l'objet mathématique en jeu, laquelle donnerait du sens à la représentation non géométrique du même objet.

De ce fait, nous faisons l'hypothèse suivante : avoir conscience de la signification *métaphorique* d'un objet mathématique, permettrait une entrée cognitive *à l'action* à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique, ceci, favoriserait en même temps, la manipulation des composantes du plan épistémologique.

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous sommes dans un enjeu mathématique appelé géométrisation lequel implique une mathématisation verticale (Treffers, 1991 ; Freudenthal, 2003) à l'intérieur du processus d'apprentissage que nous voulons construire. D'après Mason (2008) :

> "Vertical mathematisation arises when attention is directed from relationships to properties, and from properties to characteristic, defining or generative properties which can function as axioms from which all other relevant consequences flow. It has many of the characteristics of metaphor and semantic or deep learning (Marton & Saljö, 1984). Both flows are essential to learning and to developing positive dispositions towards mathematical enquiry and use". (Mason, 2008, p. 47)

Ainsi, ces caractéristiques métaphoriques de l'objet mathématique, dont nous voulons construire la signification à travers la géométrie, seraient celles qui permettraient aux élèves d'établir la transition entre le plan cognitif et les composantes du plan épistémologique. Kilhamn dans sa thèse *Making sens of negative numbers*, en faisant référence au rôle des métaphores pour des *novices* et pour des *experts*, cite Chiu et signale :

> "In a study of 'novices' and 'experts' use of metaphors to understand and solve arithmetic problems with negative numbers Chiu (2001) concludes that novices and experts used the same metaphors but used them differently. For experts the metaphors served as a resource when difficulties were faced or to connect different ideas, whereas novices more often used metaphors could to get started on a problem and to justify their answers. Metaphors could be said to serve as scaffolding for the experts but were more a point of reference for the novices". (Kilhamn, 2011, p.53)

Ce *point de référence*, qui pour nous consisterait en une interprétation métaphorique de la multiplication en géométrie, est le point de départ attendu qui permettrait à nos élèves de suivre une trajectoire non traditionnelle de l'apprentissage, grâce à une entrée cognitive à l'Espace de Travail Mathématique : *méthaphoriser*, visualiser, interpréter, agir, donner du sens et donc comprendre.

> "Metaphors are not just rhetorical devices, but powerful cognitive tools that help us to buil or grasp new concepts, as well as solving problems in efficient and friendly ways [3]".
> (Soto-Andrade & Reyes-Santander, 2011, p. 2)

4.3.3 Espace de travail mathématique et l'élargissement de l'analyse cognitive : l'intervention des signes-artefacts dans un espace d'interactions sociales

Nous trouvons dans la thèse de Falcade (2006) une vaste introduction au sujet de réflexions sur les notions sémiotiques présentes dans des différents processus d'apprentissage-enseignement des mathématiques. A propos de différents travaux portant sur ce sujet, soit qu'ils aient intégré ou non des outils informatiques, soit qu'ils restent sur les registres de représentation sémiotiques, soit qu'ils portent une attention spéciale au rôle du langage et à la compréhension des objets mathématiques, toutes ces positions, « autour du rapport entre mathématiques et sémiotique, investissent des questions d'ordre épistémologique, cognitif et socioculturel » (Falcade, 2006, p. 3-4).

Comme nous l'avons déjà mentionné (cf. Section 4.2), nous trouvons à l'intérieur de l'ETM une place non seulement visible mais aussi bien définie concernant l'existence d'un plan épistémologique et d'un plan cognitif. Par rapport à l'aspect socioculturel, il est déterminé par le contexte où l'enjeu didactique s'est produit, par contre, l'enjeu didactique a été plutôt pensé comme visant un individu quelconque, élève ou enseignant, agissant dans un milieu déterminé en vue de résoudre un problème donné.

L'enjeu didactique mentionné ci-dessus n'inclut pas des interactions explicites entre différents individus qu'ils appartiennent à un même contexte socioculturel ou non. Les liens établis entre l'ETG et la Théorie des Situations Didactiques peuvent bien intégrer une vision constructiviste de l'apprentissage, par contre, le processus d'enseignement décrit au sein de l'ETG ne compte pas nécessairement sur l'intégration d'intermédiaires, outre l'enseignant, entre le savoir à acquérir ou à développer et les apprenants. Par exemple, l'importance donnée au choix du milieu et aux situations visant la structuration de l'ETG est explicite ainsi que le processus de transformation des artefacts en instruments grâce au travail accompli par

3. voir aussi Presmeg, 1997 ; Sfard, 1997 ; Lakoff & Nunez, 2000 ; Soto-Andrade, 2006, 2007.

l'enseignant (Kuzniak, 2004). Par contre, la complexité cognitive présente dans le développement de l'ETG personnel n'est décrite que par l'intégration faite par Raymond Duval des processus cognitifs associés aux composantes de l'Espace de Travail. Par rapport aux niveaux de Van Hiele (1986), aussi intégrés à la description de l'ETG comme étant un complément de ses dimensions cognitive et psychologique, ils restent dans un idéal abstrait qui ne permet pas d'analyses cognitives portant sur les connaissances acquises par les élèves :

> « Nous n'entrerons pas ici dans la discussion pour savoir s'il s'agit vraiment du développement cognitif réel de l'élève. Pour nous, l'intérêt de cette approche, articulée chez Van Hiele avec une progression pédagogique, est d'avoir développé des observables portant sur des activités faciles à mettre en place et qui suivent le développement de la pensée mathématique ». (Kuzniak, 2004, p. 36)

Compte tenu de ce qui précède, nous avons besoin d'approfondir l'intégration des aspects cognitifs, épistémologiques et socioculturels, présents dans tout rapport entre mathématiques et sémiotique, en vue d'une meilleure compréhension des processus d'apprentissage visés et/ou produits à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique. Pour cela, il nous semble approprié de proposer l'intégration explicite d'intermédiaires là où les mathématiques et la sémiotique se retrouvent : à l'endroit où la recherche et l'acquisition de sens des objets mathématiques peuvent devenir accessibles grâce à la médiation sémiotique et, quand cela est possible, grâce aussi à la médiation sociale. Ces intermédiaires porteront ainsi le nom de *médiateurs*, et ils vont agir spécifiquement là où les différents genèses — figurale, discursive et instrumentale —, (Kuzniak, 2012) doivent se produire.

Cela dit, nous nous situons et nous intégrons l'ETM dans un processus socio-constructiviste de l'apprentissage où les dimensions socioculturelle et sémiotique s'intègrent dans la *zone de développement proximale* définit par Vygotsky :

> « Nos recherches ont montré qu'à l'aide de l'imitation l'enfant ne résout nullement tous les problèmes restés sans solution. Il atteint une certaine limite, qui varie selon les enfants. Dans notre exemple cette limite était très basse pour l'un des enfants et ne dépassait que d'un an le niveau de son développement, les deux enfants auraient résolu avec une égale facilité tous les problèmes destinés à tous les âges de l'enfance. En fait non seulement ce n'est pas le cas mais il se trouve que même en collaboration avec quelqu'un l'enfant résout plus facilement les problèmes proches de son niveau de développement, au-delà la difficulté augmente et enfin devient insurmontable même en collaboration. La possibilité plus ou moins grande qu'a l'enfant de passer de ce qu'il sait faire tout seul à ce qu'il sait faire en collaboration avec quelqu'un est précisément le symptôme le plus notable qui

caractérise la dynamique de son développement et de la réussite de son activité intellectuelle. Elle coïncide entièrement avec sa zone proximale de développement ». (Vygotsky, 1934/1997, p. 353)

C'est dans cette zone de développement proximale que les signes remplissent leur rôle de médiateurs :

> "The invention and use of signs as auxiliary means of solving a given psychological problem (to remember, compare something, report, choose, and so on) is analogous to the invention and use of tools in one psychological respects. The sign acts as un instruments of psychological activity in a manner analogous to the role of a tool in labor". (Vygotsky, 1931/1978, p. 52)

C'est bien cette intéressante conception du signe, ce signe-médiateur, que nous allons développer par la suite en nous appuyant sur des éléments théoriques déjà développés par la Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS).

4.3.4 La Théorie de la Médiation Sémiotique

La Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS), cadre théorique développé à partir des années quatre-vingt par Maria Giussepina Bartolini Bussi et Maria Alessandra Mariotti, se constitue sur la base des travaux en psychologie cognitive développés par le psychologue russe Lev Semyonovitch Vygotsky (1925-1934).

Cette théorie,

> « dans le processus de formation de concepts, et par conséquent, dans l'enseignement - apprentissage des mathématiques, [...] accorde une place centrale au langage et à l'usage de signes ; à l'utilisation d'outils impliqués dans des activités didactiques à finalités spécifiques [ainsi qu'] aux dynamiques sociales, qui relient étroitement les plan intersubjectif et intra-subjectif ». (Falcade, 2006, p. 5)

D'un point de vue didactique, la Théorie de la Médiation Sémiotique intègre d'autres éléments tels que :

> « La manipulation directe d'outils, que ce soit sous la forme d'objets concrets issus de l'histoire des mathématiques ou sous la forme d'artefacts technologiques (Batolini Bussi

et Mariotti, 1998, 1999a 1999b ; Bartolini Bussi et al., 1999c et Bartolini Bussi 2000 et 2001) ; une organisation précise du travail en classe, où les rapports entre dimension individuelle, travail en binôme et dimension collective sont partie prenante du dispositif et où les activités orales et écrites s'articulent mutuellement ; le travail de lecture et d'interprétation de sources historiques primaires avec l'aide de l'enseignant [et] la pratique d'une forme spéciale de discussion collective, appelée *'Discussion Mathématique'*, orchestrée par l'enseignant [...] ». (Falcade, 2006, p. 5)

Parmi les éléments mentionnés ci-dessus, ceux qui nous ont amenés à l'intégration de la Théorie de la Médiation Sémiotique à l'Espace de Travail Mathématique sont, d'une part, la prise en compte de médiateurs historiques et/ou technologiques en tant que*signes* ou *signes-outils* ou comme nous verrons plus tard, *signes-artefacts* et, d'autre part, l'importance du travail collaboratif au milieu du processus d'apprentissage - enseignement. Par la suite, nous allons développer un peu plus les éléments mentionnés ci-dessus en éclaircissant comment la TMS s'adapte à nos analyses en étant un cadre théorique approprié pour l'étude de nos *a priori* théoriques concernant nos propositions didactiques ainsi que l'analyse *a posteriori* de la mise en place de nos situations expérimentales d'apprentissage au collège et au lycée en France.

Le signe-artefact : origine de son rôle de médiateur

D'après Vygotsky :

> "The basic analogy between sign and tools rests on the mediating function that characterises each of them. They may, therefore, from the psychological perspective, be subsumed under the same category. We can express the logical relationship between the use of signs and tools using the schema in figure below, which shows each concept subsumed under the more general concept of indirect (mediated) activity". (Vygotsky, 1931/1978, p. 54)

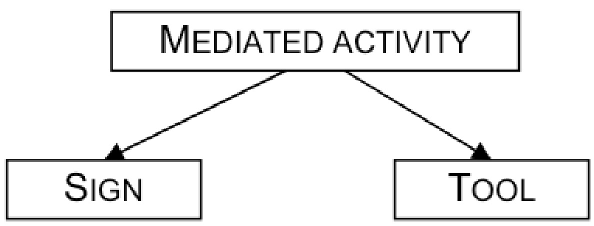


Figure 4.5 – La mise en relation de signe et d'outil à travers l'activité médiatisée

L'idée que notre « fonctionnement cognitif est profondément affecté par l'utilisation d'outils et de signes, est à la base de la TMS » (Falcade, 2006, p. 6) et cela provient de l'articulation entre signe et outil faite par Vygotsky, quand il exprime la mise en fonctionnement de cette articulation, au milieu d'une activité médiatisée, en termes de *higher psychological function* ou de *higher psychological activity* (Vygotsky, 1931/1978).

Un autre aspect que nous ne pouvons pas ne pas mentionner est lié à l'importance de bien différencier les modes de production de l'action des signes et l'action des outils, de même que reconnaître que leurs fonctions ne s'excluent pas mutuellement :

> « Leur différence substantielle réside essentiellement dans la modalité qu'ils ont d'affecter le comportement humain. Les **outils** ont une finalité externe, ils sont au service de l'activité humaine et visent à la maîtrise de la nature. Les **signes**, au contraire, ont une finalité interne, ils sont un moyen interne de contrôle. Cependant ces deux fonctions ne sont pas mutuellement exclusives. "Elles peuvent concerner le même outil et expriment la dualité de la relation qui lie l'usage extérieurement orienté à sa contre-partie intérieure ». (Falcade, 2006, p. 6)

D'après Vygotsky :

> « Toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune, celle d'être des processus médiatisés, c'est-à-dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques ». (Vygotsky, 1934/1997, p. 199)

De ce fait, c'est bien l'action médiatique du signe, ce *signe-outil*, celle qui va permettre de contrôler et d'orienter le comportement humain (Falcade, 2006) :

> « Pour expliquer de manière satisfaisante le travail en tant qu'activité de l'homme approprié à une fin, nous ne pouvons nous contenter de dire qu'il a pour origine les buts, les problèmes qui se posent à l'homme mais nous devons l'expliquer par l'emploi des outils, par l'application de moyens originaux sans lesquels le travail n'aurait pu apparaître ; de même encore la question centrale pour expliquer les formes supérieures de comportement est celle des moyens qui permettent à l'homme de maîtriser le processus de son propre comportement [...] Dans la formation de concepts, ce signe est le mot, qui sert de moyen de formation des concepts et devient par la suite leur symbole. Seule l'étude de l'utilisation fonctionnelle du mot et de son développement, de ses diverses formes d'application [...] peut fournir la clef d'analyser la formation des concepts ». (Vygotsky, 1934/1997, p. 199)

Compte tenu de ce qui précède, l'analyse de la formation de concepts dépend essentiellement de l'analyse *des moyens* permettant d'acquérir dite formation. Cette analyse implique nécessairement la prise en compte du contexte où le processus générant l'activité mentale humaine se développe :

> "Vygotsky, contrasting humans and animals, postulated two 'lines' for the genesis of human mental activity : the natural line (for elementary mental functions) and the social or cultrtal line (for the higher mental functions). The specific nature of human cognitive development is the product of the 'interweaving of these two lines'. What seems to be interesting especially when we study its development during the school age, and in particular within the school context, is the evolution of human cognition as effect of social and cultural interaction. These two elements (social and cultural) found a counterpart in two key notions introduced by Vygotsky : that of *zone of proximal development* and that of internalization. These notions play a crucial role in the use of artifacts that Vygotsky postulates in relation to the internalization process". (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 749)

C'est donc dans ce contexte appelé *zone de développement proximale* définie par Vygotsky que nous allons identifier et définir ces médiateurs de l'apprentissage appelés *signes*, dualité *signe-outil* ou dans un autre terme que nous avons déjà mentionné mais que nous allons développer par la suite : signe-artefact.

Quelques mots de plus sur la zone de développement proximale ou le milieu d'action des signes-artefacts

D'après Vygotsky, la zone de développement proximale

> "is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under the adult guidance or in collaboration with more capable peers". (Vygotsky, 1931/1978, p. 86)

De ce fait, nous pouvons remarquer l'importance d'un travail collaboratif dans le processus d'apprentissage, étant donné que l'activité cognitive est potentialisée grâce aux échanges entre des individus qui intentionnellement collaborent pour accomplir une tâche ou pour arriver au but visé (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Ainsi, le premier pas dans l'acquisition d'un concept est le travail développé dans un environnement social de l'apprentissage à l'issue duquel aura lieu le processus d'*internalisation* défini par Vygotsky comme "the internal reconstruction of an external operation" (Vygotsky, 1931/1978, p. 56) et qui correspond au processus individuel de construction de la connaissance générée par un échange social d'expériences.

Pour Vygotsky, il y a une relation inhérente entre l'activité interne et l'activité externe des individus, et cela "is a *genetic* or *developmental* relationship in which the major issue is how external processes are *transformed* to *create* internal processes" (Wertsch & Addison Stone, 1995, p. 163). En outre, comme Wertsch et Addison le soulignent, pour Vygotsky, le processus d'internalisation est surtout concerné par les processus sociaux ; puis une grande partie de ses analyses s'occupe profondement des mécanismes sémiotiques, notamment le langage, la médiation sociale et le fonctionnement individuel (Wertsch & Addison Stone, 1995) :

> "Thus, internalization is viewed as part of a larger picture concerned with how consciousness emerges out of human social life. The overall developmental scheme begins with external social activity and ends with internal individual activity. Vygotsky's account of semiotic mechanisms provide the bridge that connects the external with the internal and the social with the individual". (Wertsch & Addison Stone, 1995, p. 164)

Jean Piaget s'est référé à un processus d'*intériorisation* qui est, d'une certaine façon, analogue au processus d'internalisation. Pour lui, ce processus était

> "l'action du sujet sur le monde physique qui est internalisée, par rapport à ces aspects logiques et abstraits, et qui se transforme en *opération*. Dans Vygotsky, en revanche,[comme nous l'avons déjà dit], ce qui est internalisé est plutôt la *relation*, comme action interactive de l'un vers l'autre, ou, comme le dit Wertsch (1979), ce qui est internalisé ce sont 'les activités de nature sociale et culturelle'". (Falcade, 2006, p. 23)

De ce fait, comme nous l'avons déjà dit, ces activités de nature sociales seront intégrées au travail mathématique et ce sera donc à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique idoine, que nous allons établir une *zone de développement proximale* telle que Vygotsky l'a définie. Néanmoins, dans notre proposition didactique, il y a des aspects qui ne concernent que partiellement les éléments de la TMS. De là que dans nos séances expérimentales, les acteurs principales sont : les élèves et la médiation sociale résultant des interactions entre eux ; l'action de notre signe-artefact ainsi que la visualisation de son potentiel sémiotique et, finalement, l'action de l'enseignant comme acteur-motivateur toujours responsable de la dévolution de la tâche aux élèves (Brousseau, 1998). Cette dévolution se produirait grâce aux questions posées et à certains mots clés permettant de faire avancer la recherche en cas de blocage (cf. Section

6.3.2). Le rôle de l'enseignant a été ainsi minimisé par rapport aux attentes de la TMS. De ce fait, dans un premier temps, l'*orchestration* de l'enseignant (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) ne se montrera pas très active, puisque ce qui est l'objectif principal de cette séance c'est de voir les élèves en action collaborative en établissant par eux-mêmes le plus de relations possibles entre les différents plans de l'Espace de Travail Mathématique ainsi qu'entre les objets mathématiques en jeu grâce à la médiation de notre signe-artefact. Nous allons voir plus tard comment ce choix de limiter l'action de l'enseignant a dû nécessairement être modifié pour remettre en place une de nos séances expérimentales (cf. Section 7.1.1).

Par ailleurs, l'action, dans notre proposition didactique, de ce signe appelé artefact, rendra compte de deux fonctions propres aux signes :

> "The use of signs in accomplishing a task has a twofold cognitive function : the subject produces signs related directly to accomplish the task and to communicate with the diverse partners collaborating in the task. In the second case, the production of signs is strictly related to the process of interpretation that allows exchange of information and consequently communication". (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p.750)

Ceci, puisque "the cognitive function of using signs changes according to the function that signes have in the activity" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p.751). Ainsi, notre signe-artefact (une icône du théorème de Thalès) sera, d'une part, un instrument de justification ou de preuve et, d'autre part, une interprétation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres (cf. Section 2.5). Cette double fonction du signe est bien justifiée par Vygotsky grâce à ses études portant sur la *polysémie de mots* c'est-à-dire les différences entre signification et référence à un objet, de même qu'à l'élargissement de ce double rôle vers des signes qui ne sont pas des mots :

> "The following can serve as exemples of psychological tools and their complex systems : language ; various systems for counting ; nmemonic techniques ; algebraic symbol systems ; works of art ; writing ; schemes, diagrams, maps, and mechanical drawings ; all sorts of conventional signs ; etc". (Vygotsky, 1981, p. 137)

En outre, par rapport à l'importance des signes en tant que médiateurs dans le processus complexe visant la formation d'un concept, Vygotsky souligne :

> « L'étude expérimentale a montré que l'**utilisation fonctionnelle du mot ou d'un autre signe** comme moyen de diriger activement l'attention, de différentier et de dégager

les traits caractéristiques, de les abstraire et d'en faire une synthèse est une partie fondamentale et indispensable du processus de formation de concepts dans son ensemble. La formation du concept ou le fait qu'un mot acquiert une signification est le résultat d'une activité complexe (maniement du mot ou du signe) à laquelle participent toutes les fonctions intellectuelles essentielles dans une combinaison spécifique.

[...] Le processus de formation de concepts n'est pas réductible aux associations, à l'attention, à la représentation, au jugement, aux tendances déterminantes, bien que toutes ces fonctions participent immanquablement à cette synthèse complexe qui représente en fait ce processus. L'élément central en est, comme le montre l'étude, **l'utilisation fonctionnelle du signe, ou du mot** comme moyen permettant à l'adolescent de soumettre à son pouvoir ses propres opération psychiques, de maîtriser le cours de ses propres processus psychiques et d'orienter leur activité vers la résolution du problème auquel il est confronté.

Le concept est impossible sans les mots, la pensé conceptuelle est impossible sans la pensé verbale ; l'élément nouveau, l'élément central de tout ce processus, qu'on est fondé à considérer comme la cause productive de la maturation de concepts, est l'emploi spécifique du mot, l'utilisation fonctionnelle du signe comme moyen de formation de concepts ». (Vygotsky, 1934/1997, p. 206-207)

Cette utilisation fonctionnelle du signe, telle que Vygotsky l'a étudiée et développée, vient à corroborer l'existence d'un lien théorique et pratique entre signe et artefact :

"Analogy between signs and artifacts is based on the mediation function that both may have in accomplishing a task . [...] Within the social use of artifacts in the accomplishement of a task (that involves both the mediator and the mediatees [4]) shared signs are generated. On the one hand, these signs are related to the accomplishement of the task, in particular related to the artifact used, and, on the other hand, they may be related to the content that is to be mediated [...] Hence, the link between artifacts and signs overcomes the pure analogy in their functioning in mediating human action". (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 751-752)

Avant de finir cette section, il y a un autre élément théorique, développé par Bartolini Bussi et Mariotti (2008) que nous ne pouvons ne pas traiter ici. Nous parlons de la polysémie de l'artefact de même que, comme nous l'avons déjà mentionné, il existe la polysémie des mots et des autres signes :

"On the one hand, an artifact is related to an specific task [see Rabardel's notion of instruments in Rabardel (1995)] that seeks to provide a suitable solution. On the other

4. en accord avec la défintion et signification donné par Hassan (2002) au processus de médiation

hand, the same artifact is related to a specific mathematical knowledge. In this respect, a double semiotic link is recognizable between an artifact and both a task and a piece of knowledge. In this sense one talks of polysemy of an artifact. In principle, the expert can master such a polysemy, and, most of the time, this may happen unconsciously. [...] On the one hand, the relationship between artifact and knowledge may be expressed by signs, culturally determined, produced by cultural development, and crystallizing the meaning of the operations carried out with the artefact. On the other hand, the relationship between the artifact and the task may be expressed by signs, often contingent to the situation determinated by the solution of the particular task. In any case, a main characteristic of these signs, the production of which may be spontaneous or explicitly required by the task itself". (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 753)

Ainsi, nous avons deux systèmes parallèles de signes, lesquels doivent nécessairement être mis en relation dans un contexte promouvant une évolution. Cette évolution de signes permet d'exprimer la relation entre un artefact-médiateur et des taches à accomplir par les élèves de la même manière que des signes permettent d'établir une relation entre l'artefact et la connaissance (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

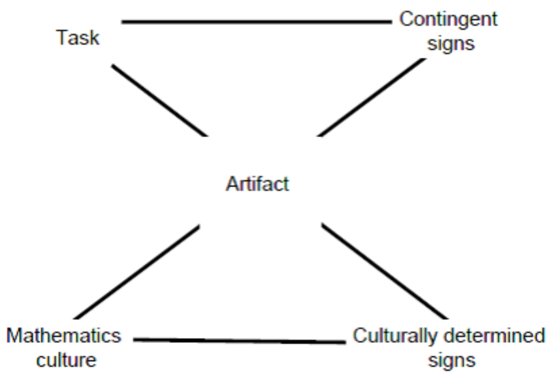


Figure 4.6 – Diagramme rendant compte de la polysémie de l'artefact (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008)

Compte tenu de ce qui précède, nous reprenons des éléments hypothétiques postulés par Rossana Falcade dans sa thèse :

"Quand un élève rencontre pour la première fois un signe issu de la culture mathématique, ce signe n'a pas pour lui aucune signification. Cependant, à l'issue d'interventions pédagogiques et sociales opportunes dans la zone du développement proximale, il commence à l'utiliser : il l'emploie dans la communication avec les autres et, en particulier, dans des activités mathématiques spécifiques. Ainsi, même si ce signe continue à avoir

> une signification instable et immature, son **utilisation fonctionnelle** dans des tâches spécifiques, médiée par les interventions de l'enseignant et des autres élèves, en permet l'évolution vers une signification compatible avec la signification qu'il possède déjà, de façon stable dans la communauté de référence". (Falcade, 2006, p. 28)

Ce signe, décrit dans l'extrait ci-dessus, a bien cette double signification dont on a parlé plus haut. La relation entre cette double relation sémiotique est considérée comme étant *le potentiel sémiotique d'un artefact*. De ce fait, ce signe, ou cet artefact, est bien un médiateur, plus spécifiquement il est un médiateur sémiotique ainsi qu'un *outil de médiation sémiotique* dans le processus d'apprentissage-enseignement :

> "In summary, on the one hand, personal meanings are related to the use of the artifact, in particular relation to the aim of accomplishing the task ; on the other hand, mathematical meanings may be related to the artifact and its use. This double semiotic relationship will be called *the semiotic potential of an artifact*. Because of this double relationship, the artifact may function as a semiotic mediator and not simply as a mediator". (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 754)

En conséquence, ce signe-artefact médiateur est un élément essentiel dans nos propositions didactiques. Comme nous le verrons plus tard, en classe de Terminale S nous n'avons pas intégré à notre séance expérimentale un outil ou artefact technologique matériel. Notre artefact est un signe, un signe mathématique, une représentation géométrique icône du théorème de Thalès (cf. Section 2.5). Ce signe, reconnu par les élèves dans la première question de la séquence (cf. Annexe C) comme un outil au service d'une preuve, devra évoluer au cours d'un travail visé comme collaboratif dès le début de la séance. Son utilisation systématique dans des activités faisant partie d'un processus sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) vise la production collective de nouveaux signes lesquels correspondent à des nouvelles interprétations du même artefact. Cela a une relation directe avec ce que Walkerdine (1990) ; Presmeg (2002) appellent *a semiotic chain* :

> "Producing a particular chain of relations of signification, in which the external reference is suppressed and yet held there by its place in gradually shifting signifying chain". (Walkerdine, 1990, p. 121)

Ces *chains* ont aussi été décrites par Presmeg comme *chains* of "signifier-signified" (Rønning, 2011, p. 3) [where] "the new signifier stands for all that went before" (Presmeg, 2002, p. 302). Comme Bartolini Bussi et Mariotti (2008) le soulignent, cette notion de *semiotic chain* est cruciale dans leur approche théorique :

> "Such a semiotic chain moves from highly contextualized signs, strictly related to the use of the artifact, to the mathematical signs that are objects of the teaching-learning activity". (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 756)

Pour nous, l'icône du théorème de Thalès sera reconnue par les élèves puisqu'il est un objet mathématique très important dans la culture mathématique française, ses propriétés le convertiront ainsi en un outil de démonstration pour finalement devenir une représentation géométrique de la multiplication portant des significations dans un contexte de transformation.

Bien sûr cette évolution dans le sens du signe ne peut pas se produire sans la médiation d'un environnement spécialement conçu pour arriver à nos fins didactiques. Les actions des élèves dans un Espace de Travail Mathématique qui est devenu *approprié* pour chacun d'entre eux font partie du processus appelé par Radford (2003) une *contextual generalization* :

> "A generalisation which still refers heavily to the subject's actions in the precise context of the task" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 756).

En accord avec Noss et Hoyles (1996), on pourrait parler de *situated signs* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), "to describe how learners construct mathematical ideas by drawing on the webbing of a particular setting, which, in turn, shapes the way the ideas are expressed" (Noss & Hoyles, 1996, p. 122).

4.3.5 Les signes comme médiateurs visuels dans un contexte de participation, leur influence dans le discours et la réification d'un objet mathématique

Ce dernier point, notamment ce qui concerne l'évolution des signes et la façon à travers laquelle ils influencent le discours, nous pourrions l'associer à ce qu'Anna Sfard appelle une *visual mediation*, ce qui corresponde à l'endroit où, "visual mediators have been defined as providers of the images with which discursants identify the object of the talk and coordinate their communaction" (Sfard, 2008, p. 147). Plus spécifiquement nous pourrions associer ce processus aux *visual realizations of mathematical signifiers* :

> "[...] Mathematical communication involves incessant transitions from signifiers to other entities that, from now on, will be called *realizations* of the signifiers. *Signifiers* are words or symbols that fonction as nouns in utterances of discourse particpants, whereas

the terms *realization of a signifier S* refers to a perceptually accessible object that may be operated upon in the attemp to produce or substanciate narratives about S. [...] The discursive transition from signifier to its realization may be immediate [...] or *mediated* by an elaborate realizing procedure". (Sfard, 2008, p. 155)

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous avons conçu un espace de travail mathématique portant sur un processus de mathématisation verticale où le *discours mathématique* [5] consiste principalement en ce que Sfard appelle *literate discourse* (Sfard, 2008) :

"Literate discourses [...] were defined as visually mediated mainly by *symbolic artifacts*. Along with *algebraic symbols*, symbolic artifacts include *icons*, such as conventional or individually designed diagrams, graphs, and other drawings. Students' fluency in this kind of discourse is the goal of school learning". (Sfard, 2008, p. 148)

Cette médiation visuelle aurait lieu à l'intérieur d'un processus qui a été décrit par Sfard dans son *Thinking as Communicating*, à travers une métaphore qu'elle considère comme la plus appropriée au processus d'apprentissage : nous parlons du *Learning as participation*. Cette métaphore vient à remplacer celle du *learning-as-acquisition* (Sfard, 2008, p. 78).

Dans le développement de cette nouvelle métaphore de l'apprentissage, Sfard fait référence à Jane Lave, une anthropologue américaine, une des premières à critiquer la faiblesse de l'ancien discours associé à l'apprentissage *par acquisition*. Lave et son co-auteur Etienne Werger, en cherchant à remplacer le *acquisitionisme* par le *participationisme*,

"asked their readers to eschew the objectifying terms *knowledge acquisition* and *learning transfer* and to think about learning as *legitimate peripheral participation* in socially organized activities. Rather than being an acquire of goods, the learner was now to be viewed as a beginning practitioner trying to gain acces to a well-defined, historically established form of human doing. The term *socially organized* was not supposed to imply that the activities in question must always be performed in collaboration with others. It only meant that processes of learning, as other human activities, are part and parcel of a patterned collective effort". (Sfard, 2008, p. 77-78)

5. Anna Sfard soutient que les mathématiques sont un discours : un discours complexe car les objets dont on parle sont une partie constitutive du même discours. "To put it bluntly, *mathematics begins where the tangible real-life objects end and where reflection on our own discourse about these objects begins*" (Sfard, 2008, p. 129). Elle souligne qu'il ne faut pas confondre le fait que les mathématiques sont un discours avec l'idée qui les conçoit comme un langage ou un registre. Par la suite, Sfard distingue deux types de discours mathématique : le *colloquial* et le *literate* deux discours entre lesquels, loin de chercher des points communs universels il faut plutôt se contenter de regarder quelques *ressemblances familiales*. Finalement quatre propriétés (*Word use*, *Visual mediators*, *Narrative*, *Routines* voir (Sfard, 2008, p. 153-154)) permettraient de façon critique décider si un exemple déterminé peut être ou non reconnu comme « mathématique » (Sfard, 2008).

La vision *participationniste* des humains et de leur développement ainsi que son flexible *focus* analytique, donnent aux *participationnistes* la chance

> "to adress the question of change that exceeds the boudaries of individual life. [...] This non-trivial discursive shift is highly consequencial, as it removes the sharp acquisionist distinction between development of an invidual and the development of a collectives. The developmental transformations are the result of two complementary processes, that of *individualization of the collective* and that of *communalization of the individual*". (Sfard, 2008, p. 80)

Ainsi, nous sommes conduits vers une définition de *la pensée* "as an individualized version of interpersonal communication" (Sfard, 2008, p. 81).

Pour approfondir sur ces aspects présentés ci-dessus, nous vous renvoyons au *Thinking as communicating* (Sfard, 2008) où tous ces éléments ont bien été développés. Par la suite, nous voudrions juste souligner que les travaux de Sfard (2008) nous intéressent profondément étant donné la richesse de cette étroite relation entre pensée et communication (commognition [6]). Nous avons parlé ci-dessus du *Learning as participation* et de *Visual mediation*, comme deux éléments qui s'intègrent parfaitement aux postulats de la Théorie de la Médiation Sémiotique en ce qui concerne ce qui est essentiel dans tout processus d'apprentissage-enseignement, néanmoins il y a encore un autre élément que nous ne pouvons pas ne pas mentionner avant de finir ce chapitre : nous nous référons au processus de *reification* et à son influence dans le *discours* :

> "[...] Reification, far from being a local transformation in the use of a single word, influences the whole discourse, shaping it in the image of discourses on material objets". (Sfard, 2008, p. 45)

Un exemple qui nous semble approprié pour expliquer, en termes simples, ce que Sfard appelle *reification*, porte sur le processus de réification des nombres :

> "[...] Childrens begin their numerical education by learning to count and, after realizing that repetitive counting of the same set always ends with the same number-word, they accept the idea that for any practical purpose (e.g., for the sake of certain comparaisons and classifications) remembering this last number-word is fully sufficient. At this

6. "A *commognitive* theory of learning (Sfard 2007, 2008) is rooted in the assumption that all human skills are products of individualization of historically established collective activities. Differents types of communication that bring some people together and exclude others are in this framework called differents *discourses*" (Kilhamn, 2011, p. 74)

point, the number-words, which became shortcuts for the action of counting, may be used in sentences such as 'There are five marbles in the box', where they play the role of adjectives (determiners). Some time later, these words turn into nouns and start appearing in propositions such as 'Three plus five is eight' or 'Five is bigger than three'. When featured in this new role, they are no longer followed by the names of objects that have been counted (note the subtle difference between this last sentence and the sentence 'Five is *more* than three', in which the number-words seem to appear in the role of adjectives even if they are not followed by nouns). It is only at this last stage that what began as a mere procedure of ritualized chanting of numbers-words becomes fully refied and turns into a metaphorical objet". (Sfard, 2008, p. 47) [7]

Finalement, nous n'avons qu'à souligner que tous les éléments mentionnés ci-dessus (cf. Section 4.3.5) peuvent bien être mis en relation avec plusieurs autres comportant notre intégration théorique et auxquels nous avons déjà fait référence au cours de ce chapitre. Tous ces éléments sont au cœur de la relation entre *pensée et communication* et *apprentissage et médiation* : les discussions collectives dans une *zone de développement proximale* (*learning as participation*), la compréhension d'un objet mathématique et son interprétation métaphorique (*reification*) grâce à l'action d'un artefact médiateur de l'apprentissage permettant de découvrir ou de reconnaître sa signification géométrique (*Visual mediation* ou *Visual realizations*) et le raisonnement métaphorique comme point d'entrée à l'Espace de Travail Mathématique (*Power of discourses*).

4.4 Conclusion

La richesse de notre approche didactique-mathématique principale, grâce au fait d'être structurée par des interactions permanentes entre un plan épistémologique et un autre cognitif, nous a permis de visualiser des possibilités complémentaires de ce qui a été traditionnellement établi, par rapport à l'entrée, point de départ ou origine des genèses à l'intérieur d'un espace de travail mathématique.

7. Par la suite Sfard souligne que le processus de réification est graduel et très conséquemment associé à une transformation discursive, en d'autres termes, réification "increases the communicative effectiveness of discourse" (Sfard, 2008, p. 52). Plus tard, en se référant aux *metaphorical objets* mentionnées ci-dessus, elle expose que "many of the objects we speak about have been created for the sake of better communication By replacing a lenghty description of actions with a single sentence featuring a storytelling noun we not only communicate more economically, but also increase the flexibility and applicability of our utterance. Note that this claim reverses the traditional vision of the relation between talk and its objets : if, so far, we thought about discourses as secondary to the things these discourses talk about, it is now posited that at least some of the objects we talk about emerge out of our attempts to enhance the power of discourses". (Sfard, 2008, p. 52-53)

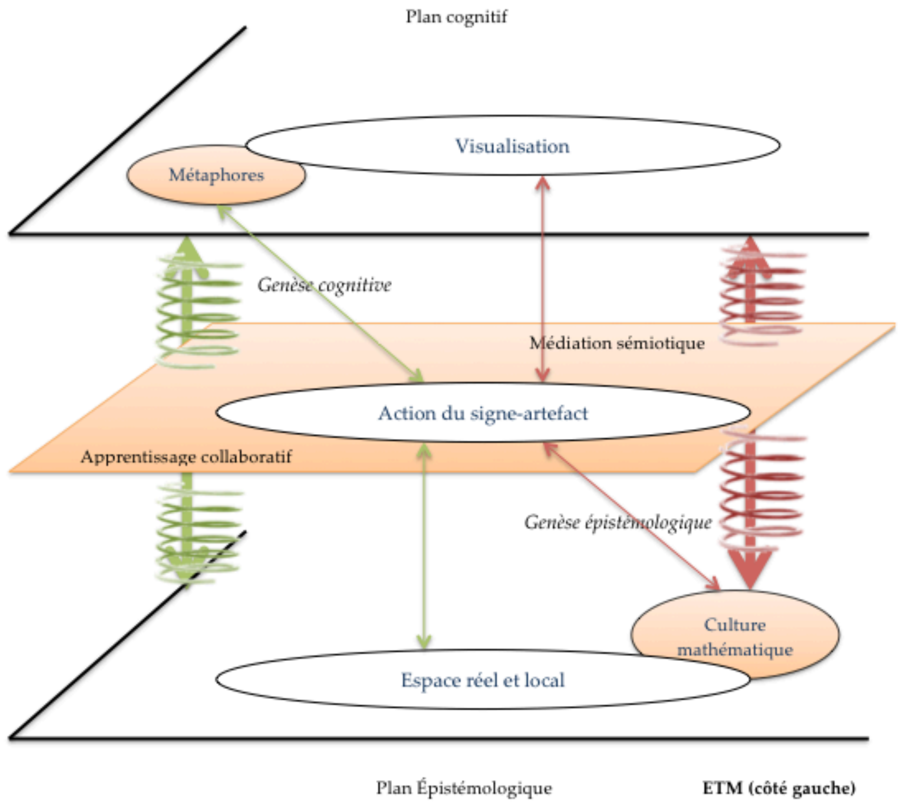


Figure 4.7 – Schéma rendant compte de l 'aspect dynamique des composantes de l'ETM et de l'articulation des plans épistémologique et cognitif grâce à l'action du signe-artefact dans un contexte de médiation sémiotique

.

Intégrer à l'Espace de Travail Mathématique les différents éléments théoriques mentionnés tout au long de ce chapitre est le résultat de profondes réflexions autour de certaines conceptions didactiques et cognitives de l'apprentissage.

Notre intérêt à l'aspect social des processus d'apprentissage, ainsi qu'à l'étude des processus de médiation favorisant la construction collaborative d'un objet mathématique, nous ont conduits à l'élaboration d'un cadre théorique qui porte principalement sur une conception unifiée des éléments cognitivo-didactiques.

Cette approche s'intéresse principalement à des interprétations métaphoriques des connaissances mathématiques, à des utilisations médiatiques de ces interprétations ainsi qu'à la construction de nouvelles connaissances jusqu'à ce que sa compréhension devienne *explicitable* et *inter-*

prétable grâce à sa verbalisation dans une situation de *communication verbale*.

Nous avons commencé par donner un contexte à notre point de départ concernant le rôle des représentations géométriques pour l'apprentissage d'objets mathématiques usuellement représentés dans un autre cadre mathématique : l'importance de la visualisation ainsi que l'importance de prendre en compte de la complexité cognitive des situations d'apprentissage qui impliquent des changements de registres de représentation sémiotique. Ensuite, l'analyse de l'Espace de Travail Mathématique nous a conduits à la proposition d'une entrée cognitive au travail mathématique. Cette proposition devient aussi un des fondements de nos propositions didactiques et vient confirmer une nouvelle conception de l'enseignement de mathématiques. Dans ce nouveau regard un nouvel élément s'intègre à notre approche théorique : les métaphores. D'une part, ces métaphores constituent des éléments déclencheurs de l'action à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique et, d'autre part, elles peuvent émerger comme le résultat du travail mathématique et des interactions entre les composantes des deux plan de l'ETM. Ces interactions se produisent en fonction des genèses — figurale, instrumentale et discursive — lesquelles peuvent émerger soit du plan épistémologique (ou l'entrée traditionnelle à l'ETM), soit du plan cognitif.

Nous postulons que l'émergence de ces genèses est favorisée par l'action de médiateurs de l'apprentissage. En ce moment, nous situons l'Espace de Travail Mathématique dans un contexte socioconstructiviste de l'apprentissage, et dans ce contexte, ces médiateurs sont des signes, notamment des signes-artefacts, lesquels sont censés pouvoir *conduire* le travail mathématique au milieu d'un processus de collaboration social entre élèves et enseignant. Nous allons observer plus tard ces interactions tout au long d'une situation que nous appelons une séance expérimentale d'apprentissage, où nous voulons étudier comment des élèves de Terminale S s'approprient un Espace de Travail Mathématique pour rendre compte d'une interprétation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

Finalement, le travail mathématique devrait aboutir à l'état optimal d'un processus d'apprentissage : la compréhension de l'objet mathématique en jeu. La complexité de ce processus ainsi que les difficultés de le déterminer nous ont conduit à insister par rapport à l'importance d'un travail mathématique *participationniste* où les interactions entre les élèves permettent non seulement l'émergence des *discours* mais aussi une évolution *verbalisable* et *audible*, grâce à laquelle nous pouvons accéder à l'identification d'une possible compréhension/réification des objets mathématiques.

C'est donc à travers ce regard théorique que nous allons étudier nos propositions didactiques ainsi que les résultats de nos expérimentations. Méthodologiquement, cette intégration théorique a été partielle dans un premier temps, car l'analyse de la première partie de la phase expérimentale de notre recherche (le questionnaire diagnostique) se fonde sur une vision plutôt traditionnelle de l'Espace de Travail Mathématique. De ce fait, les analyses du questionnaire portent sur des critères qui concernent plutôt les possibilités des élèves d'établir des relations entre les composantes de l'énoncé et de la figure ainsi que sur leurs possibilités d'agir en prenant en compte des interactions entre différents registres de représentation sémiotique. Dans un deuxième temps d'analyse, c'est-à-dire pour l'analyse des séquences d'apprentissage, notre regard prendra en compte une vision complètement intégrée de nos approches théoriques, avec un contenu très élevé des éléments portant sur la médiation sémiotique et les interactions sociales. De ce fait, nous tenons à ce que les concordances entre les éléments théoriques présentés dans ce chapitre et nos propositions didactiques tout à fait porteuses de certains de ces éléments (cf. Chapitre 6) soient mises en évidence au cœur de nos analyses.

Chapitre 5

Méthodologie d’analyse

5.1 Introduction : un outil d’analyse intégrant nos cadres théoriques principaux

L’intérêt d’analyser les activités de traitement de la multiplication nous a amenés à l’organisation et à l’ intégration de nos éléments théoriques pour la conception d’un outil d’analyse qui nous permette de répondre à la question suivante : **Peut-on identifier et différencier des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l’ETM personnel (ou approprié) des élèves rendant compte d’une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?**

A priori et *a posteriori* les activités proposées dans chacun des deux contextes expérimentals — questionnaire et séquences d’apprentissage — seront analysés en prenant en compte qu’elles sont des « activateurs » (Kuzniak, 2010, p. 5) d’un Espace de Travail Mathématique. De ce fait, étant donné notre intérêt pour le rôle de la géométrie dans la construction du sens d’un objet mathématique, nous allons analyser, dans chacune des activités proposées, les interactions produites entre différents registres de représentation sémiotique, mettant en évidence des relations entre multiplication et transformations géométriques.

Pour cela, nous allons intégrer dans un premier temps, c’est-à-dire dans l’analyse du questionnaire, trois de nos approches théoriques principales — Espace de Travail Mathématique de Kuzniak (2004, 2012), jeu de cadres de Douady (1986) et les travaux sur le changement de registres de représentation sémiotique de Duval (1993, 2008) — lesquels nous permettront la mise en place d'une analyse intégrant des aspects cognitifs-sémiotiques et didactiques-mathématiques. A travers l'analyse des réponses aux questions posées dans chacune des activités correspondantes à la phase expérimentale de notre recherche, nous allons étudier comment se sont produites des relations entre différents cadres mathématiques (Duval, 2006c) : a-t-il existé une ré-interprétation du contenu mathématique en question ? Quelles correspondances existent entre les représentations d'un même objet mathématique dans des différents cadres mathématiques ?

Dans un deuxième temps, c'est-à-dire dans l'analyse des séances d'enseignement, nous allons intégrer aux approches précédentes les approches théoriques portant sur la médiation sémiotique de Bartolini Bussi et Mariotti (2008) ainsi qu'un regard complémentaire portant sur certaines réflexions de Radford (2003, 2004) et de Sfard (2008) associées à la médiation sémiotique, à la construction sociale et la compréhension d'un objet mathématique. Pour chacune de nos analyses nous allons considérer les critères et la méthodologie que nous décrivons en profondeur dans les sections 5.1.1 et 5.1.2.

Nous allons étudier la nature des genèses épistémologiques et cognitives articulant les composantes de l'Espace de Travail Géométrique. Sur le plan épistémologique, le point de départ de ces genèses serait identifié par l'action des paradigmes géométriques et des connaissances mathématiques structurant et organisant l'Espace de Travail Mathématique idoine ou personnel. Sur le plan cognitif, ces genèses seront identifiées par la mise en œuvre d'éléments métaphoriques favorisant une entrée cognitive à l'ETM. Nous allons étudier les trois genèses décrites par Kuzniak (2012), mais nous allons focaliser notre analyse sur les genèses sémiotiques, ceci étant donné notre intérêt au point de rencontre de plusieurs cadres mathématiques, et notamment, à l'émergence et développement d'un processus de visualisation permettant la reconnaissance et la construction de la multiplication dans des différents registres de représentation. De façon complémentaire, nous allons aussi étudier les genèses discursives étant donné que nous voulons générer, au cours de nos activités, un processus de géométrisation de la multiplication, ce qui implique un discours explicatif des représentations géométriques en jeu : nous tenons à ce que la géométrisation

> "combines geometric shapes and mathematical concepts [being] central to mathematical understanding. We saw the strength of images or experiments in developing or reinforcing certainty in the validity of an announced result [but] a discursive explanation with words is necessary to argue and to convince others". (Kuzniak, 2012, p. 7)

Comme nous l'avons déjà mentionné, nos analyses ne vont pas suivre le même modèle pour chacune de nos expérimentations étant donné le caractère différent d'un questionnaire individuel - diagnostique (cf. Annexe B.1) et d'une séance d'apprentissage incluant un travail collaboratif entre les élèves et des interventions de l'enseignant. De ce fait, nous allons présenter la méthodologie d'analyse pour chacune de nos expérimentations en tenant compte de l'articulation de nos approches théoriques. Dans cette articulation il y a eu des aspects spécifiques à prendre en compte pour la conception d'un instrument d'analyse adéquat à nos intentions didactiques pour chacune des nos expérimentations.

5.1.1 Analyse du questionnaire : critères

Premièrement, nous rendrons compte d'une analyse *a priori* portant sur les interactions entre les éléments constituant chacune des questions posées dans le questionnaire : nous voudrions identifier comment se produisent les interactions entre différents registres de représentations à partir de la relation énoncé-figure. Plus spécifiquement, nous allons identifier, décrire et analyser les composantes de la figure et de l'énoncé ainsi que leurs possibilités d'être mis en relation à travers des procédures mathématiques spécifiques. Ces procédures mathématiques vont être orientées par le choix du paradigme géométrique de référence (Kuzniak, 2004) permettant d'aborder la tâche à réaliser. Cette analyse sera organisé de la façon suivante :

- Analyse globale de la tâche : le (s) paradigme (s) de référence dans lequel (s) situer la tâche ; le processus cognitif prédominant visé : visualisation, preuve ou construction ; les connaissances mathématiques à mobiliser.
- Analyse de la figure : type de figure (générique ou particulière) ; codages, rôle des codages ; les propriétés auxquelles elle fait appel ; leurs possibilités de traitement à l'intérieur d'un même registre de représentation sémiotique.
- Analyse de l'énoncé : ses composantes et leurs liens explicites ou implicites avec la figure.
- Analyse des procédures de résolution : dans quel cadre mathématique ; avec ou sans instruments géométriques ; possibilités de conversion des représentations d'objets mathématiques entre un registre et un autre ; possibilités de phases intermédiaires de résolution ; s'il existe une réponse géométrique, quels seraient les processus cognitifs prédominants dans la formulation de l'activité et ceux qui seront prédominants dans les procédures de résolution.

Deuxièmement, nous allons analyser les réponses effectives des élèves : les activités mettant en évidence la compréhension du sens de la multiplication à travers la manipulation de certains objets géométriques, spécifiquement la mise en relation figure-énoncé, les traitements et les conversions produites associées à des différents registres de représentation, les éléments rendant évidents des processus cognitifs tels que la visualisation, la construction ou la preuve. Ainsi, en prenant en compte la même organisation de notre analyse *a priori* nous voudrions déterminer dans les réponses des élèves :

– Le (s) processus cognitifs et les procédures rendant compte de l'interprétation des questions.
– Le (s) paradigme géométrique, organisant l'espace de travail mathématique personnel des élèves.
– Les connaissances mathématiques mises en place.
– Les aspects de la figure et de l'énoncé qui ont été pris en compte : les procédures des élèves qui nous permettent de déterminer la mise en relation entre figure et énoncé.
– Les traitements mathématiques qui se sont produits et le registre de représentation correspondant.
– Les processus de conversion qui ont été mis en place : reconnaissance des éléments de l'énoncé et de la figure qui ont été considérés dans le processus.

Les réponses à ces questions nous permettront d'une part, d'identifier des correspondances et des différences avec ce que nous avons visé *a priori* et, d'autre part, d'obtenir une vision plus concrète de l'ETM personnel des élèves notamment sur la façon de mettre en lien la multiplication, ses significations et la géométrie ainsi que la production effective des interactions entre les registres de représentation intervenant dans chaque activité.

Grâce à une étude approfondie de chacune des questions du questionnaire (cf. Annexe B.1) nous avons identifié onze types de réponses possibles, que nous avons classifiées en quatre groupes selon leur contenu, cadre ou technologie (Chevallard, 1985) susceptibles d'être mis en fonctionnement pour répondre et/ou pour justifier les réponses données. Le tableau suivant rend compte de notre classification. La première colonne indique le nom générique de chaque groupe de réponses dont nous parlerons par la suite :

Théorème de Thalès	Thalès-Démonstration	Thalès-Calcul	Mesure-Thalès-Calcul	-
Représentation géométrique	Géométrique-Propriété	Géométrique-Visuelle	Géométrique-Expression	-
Nombres complexes	Complexe-Calcul	Complexe-Propriété	Complexe-Expression	Mesure-Complexe-Calcul
Analytique	Analytique	-	-	-

Le premier groupe de réponses correspond aux réponses faisant appel au théorème de Thalès. Les réponses possibles dépendent de la façon dont le théorème a été pris en compte par les élèves : soit comme un outil pour la démonstration ou preuve de vérité des assertions données dans des différents énoncés, soit comme un outil de calcul avec ou sans mesurage.

Le deuxième groupe est directement associé aux questions où la réponse attendue consiste en une représentation géométrique. Si ces réponses n'ont pas une expression visuelle, elles pourraient être données par l'expression d'une propriété géométrique correspondant dans son contenu à la représentation visuelle attendue.

Le troisième groupe réunit les réponses constituées dans l'ensemble des nombres complexes. Ces réponses peuvent être diverses tout en dépendant du paradigme géométrique prédominant ainsi que du traitement du contenu en question.

Un quatrième groupe vise les réponses portant sur la recherche analytique des propriétés des objets présentés dans l'énoncé et dans la figure, sans nécessairement faire appel aux propriétés propres aux nombres complexes en question.

Nous allons voir que cette classification de réponses, et notamment son intégration dans les analyses *a posteriori* de chacune des questions, nous a permis d'une part, d'organiser les réponses des élèves, ce qui nous a donné la possibilité d'étudier certains exemples significatifs d'entre les données recueillies grâce à la mise en place du questionnaire, et d'autre part, d'avoir une vision globale et quantitative des premiers résultats obtenus.

Méthodologie de l'analyse des réponses des élèves

L'analyse des réponses du questionnaire a été organisée en trois parties, en suivant la même technique de présentation pour chacune des questions :

- Réponses attendues et leurs analyses respectives.
- Tableau de classification des réponses attendues.
- Réponses des élèves et leurs analyses respectives.

La première des réponses attendues correspond à ce que nous identifions comme la réponse de référence. L'analyse de cette première réponse portera sur l'étude globale de la tâche en fonction des éléments que nous avons déjà mentionnés dans la section 5.1.1.

Le tableau de classification des réponses attendues rendra compte d'une façon synthétique des réponses effectivement possibles pour chacune des questions. Cette classification des réponses portera sur les onze types de réponses possibles déjà mentionnées, sachant qu'à chaque question se sont associées seulement certaines des réponses possibles.

La troisième partie portera sur une sélection de réponses des élèves, lesquelles seront analysées sous le regarde théorique déjà mentionné. À la fin de chaque analyse nous intégrerons une classification des réponses des élèves associée au tableau de classification des réponses attendues. De ce fait, nous aurons accès à un premier croisement entre l'analyse *a priori* et le travail effectif des élèves.

En outre, nous devons souligner que toutes les trois parties décrites ci-dessus sont essentielles non seulement puisqu'elles permettent ce premier croisement entre l'analyse *a priori* et les réponses obtenues grâce à la mise en place du questionnaire, mais aussi car cette organisation des données facilitera la construction des schémas globaux rendant compte des interactions entre les différents éléments constituant l'Espace de Travail Mathématique personnel des élèves. Finalement, les conclusions résultant de l'analyse de cette première expérimentation détermineront les pas à suivre, à travers des orientations didactiques qui seront une partie essentielle dans la conception et la mise en place des séquences d'apprentissage, lesquelles correspondent à la deuxième et principale phase expérimentale de cette recherche.

5.1.2 Analyse des séquences d'apprentissage : critères

La mise en place de deux séances expérimentales d'apprentissage au collège et au lycée en France répond, ainsi que le questionnaire, à notre intérêt de déterminer les possibilités des élèves de mettre en lien la multiplication et ses significations géométriques, à travers l'appropriation d'un espace de travail mathématique et de la production d'interactions entre les composantes des différents plans le constituant.

Pour chacune des séquences — pour la classe de Quatrième et pour la classe de Terminale S — et spécifiquement en ce qui concerne les questions posées, il faut d'abord considérer que ce que nous demandons aux élèves devrait pouvoir être résolu soit à partir de la mise en œuvre de leurs connaissances mathématiques préalables, soit en suivant le modèle de ce qui a été donné et travaillé au cours de la séquence :

– Observer et interpréter la représentation géométrique de la multiplication de Descartes.

– Construire une représentation géométrique analogue à celle proposée par Descartes en prenant en compte le changement d'une variable didactique : la nature des facteurs (des entiers positifs aux entiers négatifs, des fractions et/ou des nombres complexes).
– Expliquer ou justifier en termes implicites ou explicites associés à la proportionnalité sous-jacente au théorème de Thalès, la configuration géométrique du produit de Descartes.
– Expliquer ou justifier en termes implicites ou explicites associés aux transformations dans le plan et/ou à la proportionnalité sous-jacente au théorème de Thalès, une représentation géométrique du produit entre un entier positif et un rationnel, deux entiers relatifs et/ou entre deux nombres complexes.
– Rédiger une description de la multiplication de nombres relatifs et/ou complexes en fonction de l'interprétation de leur représentation géométrique.
– Construire géométriquement la multiplication de deux nombres complexes (séquence en classe de Terminale S).
– Donner une interprétation géométrique de la multiplication.

Nous précisons que les deux séances proposées ne correspondent pas à des séances ordinaires de l'enseignement en France, mais à des séances expérimentales et originales d'apprentissage. De ce fait, pour chacune de ces séances, nous nous sommes fixés l'objectif suivant : déterminer les possibilités des élèves de mettre en place des connaissances mathématiques adéquates à nos intentions didactiques (cf. Section 5) dans un contexte non traditionnel d'apprentissage. Dans ce contexte, nous tenons à ce que l'analyse de leurs réponses rende compte de :

– L'assimilation par les élèves de connaissances mathématiques préalables et de quelle façon ces connaissances ont été mises en oeuvre.
– Les interactions produites entre les composants de l'ETM approprié par les élèves : identification et différenciation de parcours rendant compte de l'origine des genèses, les genèses prédominantes. Ceci est directement lié à la détermination de l'entrée favorisée dans l'Espace de Travail Mathématique : cognitive ou épistémologique.
– Le rôle joué en tant que signe-artefact, par la configuration du théorème de Thalès correspondant à la représentation géométrique de la multiplication de Descartes.

En outre, notre intérêt aux interactions entre différents registres de représentation sémiotique à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique nous situe, comme dans le questionnaire, dans la recherche de relations entre les éléments — énoncés et représentations géométriques — constituant le milieu matériel (ou l'environnement papier-crayon) des séquences d'apprentissage proposées. Pour cela, nous allons reprendre les critères d'analyse des relations entre les énoncés et les figures du questionnaire (cf. Subsection 5.1.1). Néanmoins, essentiellement pour cette deuxième expérimentation, nous allons étudier en profondeur :

- Le rôle joué par notre élément médiateur, signe-artefact, dans le processus d'acquisition, découverte ou réinvestissement des significations géométriques de la multiplication. L'intégration théorique des notions telles que signe, signe-artefact et potentiel sémiotique d'un artefact (Falcade, 2002), nous permettra de répondre à une nouvelle question qui s'intègre à nos analyses didactiques : les représentations géométriques, données ou demandées, reconnues comme des outils psychologiques ou des signes-artefacts, sont-elles « [capables] de renvoyer à un signifié mathématique précis (Falcade, 2002, p. 2) » dans notre cas, la multiplication ? Ceci nous permettrait d'approfondir encore dans l'étude des genèses figurales à l'intérieur d'un espace de travail mathématique, où nous nous intéressons à la description des "semotic process associated with visual thinking and involved in geometrie" (Kuzniak, 2012, p. 6).
- La question de l'influence, dans le discours mathématique, des interactions sociales, le contexte culturel et la médiation (même limitée) de l'enseignant.
- La question de la différentiation des discours rendant compte d'une compréhension des significations géométriques de la multiplication et l'association de ces discours à une *trajectoire* déterminée tout au long de la séance.

Ainsi, des nouveaux enjeux deviennent importants à analyser spécialement grâce à l'introduction des nouveaux éléments théoriques venant à complémentaire l'étude de l'Espace de Travail Mathématique : comme nous l'avons déjà dit, ce sont des éléments de la Théorie de la Médiation Sémiotique de Bartolini Bussi et Mariotti (2008) et quelques réflexions provenant de certains travaux de Radford (2000, 2004) et de Sfard (2008), tel que nous l'avons détaillé précédemment.

Par la suite, **nous présenterons la méthodologie d'analyse des séquences et les résultats de notre recherche concernant principalement les expérimentations mises en place en classe de Terminale S, ceci car les changements de certaines variables dans la structure et la mise en place des expérimentations en classe de Quatrième changent l'essence de notre situation initiale : notre situation expérimentale en classe de Quatrième correspond plus à une situation didactique où élèves et enseignant travaillent ensemble dans la construction du sens de la multiplication, qu'à une situation de réinvestissement du sens de la multiplication, comme celle mise en place en classe de Terminale S.**

De ce fait, en classe de Quatrième, les connaissances préalables des élèves ne remplissent pas le même rôle qu'en classe de Terminale S ; de la même manière, tel que nous l'avons testé dans une première expérimentation en classe de Quatrième, le raisonnement mathématique à développer au cours de la séance doit se construire avec l'enseignant au lieu de se manifester comme réponse à une situation non traditionnelle d'apprentissage.

Compte tenu de ce qui précède, le déroulement de notre séance expérimentale en classe de Quatrième ne sera, par la suite, qu'esquissée (cf. Sections 7.1 et 7.1.1). Nous allons donc présenter cette *nouvelle situation* où la collaboration entre élèves, l'orchestration de l'enseignant et l'intégration d'une composante technologique s'intègrent à cette expérience, en enrichissant notre travail de recherche et en confirmant nos hypothèses par rapport à l'importance d'une intégration de nos choix théoriques et méthodologiques à l'enseignement ordinaire des mathématiques en France. Le travail réalisé en classe de Quatrième sera repris dans le chapitre portant sur les perspectives de notre recherche.

Méthodologie de l'analyse des réponses des élèves dans un espace de travail mathématique collaboratif en classe de Terminale S

L'analyse des activités des élèves (Robert, 2008) nous demande la mise en relation de plusieurs éléments théoriques (cf. Section 5.1.2) nous permettant d'interpréter non seulement les relations établies entre les composantes du milieu matériel donné aux élèves mais aussi les interactions produites entre les élèves à l'intérieur des groupes de travail dans une séance d'apprentissage non-traditionnelle.

La complexité d'interpréter les données obtenues nous a conduit à l'intégration d'un dispositif expérimental d'analyse (Barrera Curin & Kuzniak, 2012). De ce fait, plusieurs objectifs déterminent initialement nos analyses de sorte que nous soyons petit à petit amenés à donner une réponse à notre deuxième question de recherche.

Le principal objectif, que nous appelons *didactique*, consiste à déterminer des parcours des élèves à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique allant de la multiplication de Descartes à la compréhension des significations géométriques de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

Compte tenu de notre dispositif expérimental d'analyse, deux autres objectifs s'intègrent à l'objectif principal mentionné ci-dessus et ils portent sur une intégration entre une analyse didactique et une analyse statistique des données :

– Mettre en place une analyse exploratoire en combinant une analyse didactique et une analyse statistique des données. Notre objectif est d'enrichir l'analyse didactique grâce à la prise en compte d'une analyse implicative portant spécifiquement sur l'interprétation d'arbres de similarité.
– Déterminer les possibilités de confier une analyse didactique à plus grande échelle aux informations fournies par les arbres de similarités.

Pour cela, nous suivons et adaptons la méthodologie développée par Kuzniak et Rauscher (Kuzniak & Rauscher, 2011) :

– Une première analyse, qu'on pourra qualifier de didactique, permet de dégager une typologie des parcours d'élèves. (« classifications faites *à la main* [1] », méthodologie d'analyse de l'ETM : type de genèse, première visualisation des parcours des individus…).
– Une analyse hiérarchique et implicative permet d'affiner, de valider ou d'invalider certains des points obtenus dans l'analyse didactique. Elle permet aussi d'identifier les caractéristiques des différents parcours d'élèves. (Les classes obtenues avec le logiciel de statistique…).
– A partir de cette double analyse, il serait alors possible de sélectionner certains items pour vérifier dans une expérimentation à plus large échelle les caractéristiques ainsi dégagées. (Croisement des données, parcours définitifs).

Le fait de mettre en place cette intégration avec un échantillon très petit d'individus vise, d'une part, à ce que nous puissions orienter puis enrichir notre analyse didactique et, d'autre part, à ce que nous puissions accepter ou rejeter l'hypothèse du fait qu'une analyse statistique à plus grande échelle pourrait bien être reléguée, dans un premier temps, à l'information fournie para les arbres de similarité d'un logiciel de statistique. Ce dernier item n'est pas prioritaire dans cette étude.

Comme nous pouvons l'observer, il existe plusieurs raisons nous conduisant au choix de cette méthodologie *initiale* d'analyse de données. Néanmoins, étant donné nos difficultés d'aborder l'analyse des données recueillies, cette méthodologie mixte fait notamment partie d'une stratégie qui nous permettra, d'une certaine manière, de focaliser l'analyse didactique sur des éléments spécifiques résultant des points en commun entre une première analyse *à la main* nous permettant de classer les individus et les information fournies par les arbres de similarité. **Ceci est bien un élément clé justifiant notre choix méthodologique car il s'agit d'un point d'entrée qui permet de satisfaire notre besoin d'aborder notre ana-**

1. Une analyse *à la main* consiste en une étude cas par cas de la totalité de réponses des individus. Cette analyse porte sur la recherche d'éléments constituant l'analyse *a priori* de chacune des questions de la séquence.

lyse d'une façon organisée qui nous conduise, petit à petit, à choisir les données les plus appropriées qui feront l'objet de nos analyses didactiques les plus profondes.

Étant donné que nous nous intéressons aux parcours des élèves au cours d'une séquence d'apprentissage, nous commençons notre analyse par l'étude de la dernière question où des éléments ayant été traités tout au long de la séquence devraient se rendre intégrés et identifiables. De ce fait, les éléments discursifs identifiés dans cette dernière réponse devraient être le résultat d'un parcours spécifique rendant compte des appropriations *personnelles* et aussi spécifiques de l'Espace de Travail Mathématique. Nous tenons à ce que l'étude des réponses à la dernière question nous permette d'identifier des caractéristiques particulières à chacun des parcours associés à des différentes types de réponses.

Dans un premier temps, une analyse *a priori* de la séquence en question rendra compte de la réponse attendue, des éléments de réponse possibles ainsi que des entrées à l'ETM pour chacune des questions. Dans un deuxième temps, les individus seront classés selon la réponse donnée à la dernière question. Le choix de commencer une classification en fonction de la dernière question est justifié par le fait que les réponses à cette question seraient le résultat d'un processus de réflexion qui doit prendre en compte la totalité du travail réalisé pendant la séance. Ensuite, d'autres classes seront mises en place en prenant en compte des éléments transversaux à la première classification. De ce fait, nous aurons à disposition des classifications à partir desquelles nous allons commencer l'analyse en remontant de la dernière à la première question des séquences des individus pour identifier les parcours des élèves correspondants à chacune de nos classifications. Cette étude en arrière, vise la détermination des réponses effectives tout au long de la séquence. Nous allons rendre compte, à travers des tableaux, de la totalité des réponses retrouvées ainsi que des individus auxquels ces réponses sont associées.

A ce moment de l'analyse, nous allons faire intervenir la première mise en relation entre l'étude des séquences *faites à la main* et l'information fournie par les arbres de similarités. Un premier arbre de similarité donnée par le logiciel C.H.I.C (Gras, 1991) porte sur la totalité des individus ayant participé de l'expérience ainsi que sur les éléments de réponse donnés dans la dernière question, les non réponses à la dernière question et les réponses identifiées tout au long de la séquence pour chacun des individus : existe-il une cohérence entre les résultats sortant de l'analyse des arbres de similarité donnés par le logiciel et les classifications faites à la main d'après les éléments de réponse considérés dans la réponse à la dernière question ? Y a-t-il des différences entre ces classes quand nous excluons de l'analyse quantitative les non réponses à la dernière question ?

Finalement, une place sera donnée à une analyse didactique des parcours retrouvés sous le regard de nos approches théoriques de sorte que nous puissions les caractériser. De l'identification, description et analyse des parcours dont nous parlons ci-dessus, nous allons identifier les comportements épistémologiques et cognitifs des élèves : quelle appropriation de l'ETM proposé ? Quels types de genèses ont déterminé leurs choix de réponse à l'intérieur de leurs espaces de travail mathématique personnels ?

Pour rendre plus clairement compte de nos résultats nous allons incorporer un codage pour différencier les classes ainsi que leurs respectifs groupes de travail. Étant donné que nous avons mis en place notre expérimentation dans trois lycées de l'Ile de France mais que dans un d'entre eux nous sommes intervenus dans deux classes différentes, nous avons choisi un codage par classe et non pas par lycée. De ce fait, nous allons identifier chaque groupe de travail (lesquels nous appelons *individus* puisque nous leur donnons le statut d'une entité) par IA, IB, IC et ainsi de suite. Pour différencier les classes nous allons inclure le code C1, C2, C3 et C4.

Compte tenu de ce qui précède, le processus de détermination et d'analyse des parcours des individus dont nous avons parlé ci-dessus suivra les pas suivantes :

1. Première classification des réponses des élèves : réponses ou non-réponse à la dernière question
2. Deuxième classification des réponses des élèves en fonction des contenus mathématiques remarquables dans les réponses à la dernière question
3. Des classifications transversales aux réponses effectives des élèves sur la base des premières classifications des réponses à la dernière question
4. Identification des réponses données aux autres questions de la séquence
5. Mise en relation dans des tableaux de double entrée de chacune des réponses données aux autres questions de la séquence avec les individus correspondants
6. Analyse des classifications et croisement des résultats avec un traitement statistique des données
7. Analyse des parcours retrouvés : dans l'analyse de l'espace de travail mathématique, nous allons étudier les *genèses* épistémologiques et cognitives (Kuzniak, 2012) possibles d'identifier grâce aux traces écrites des élèves. Nous verrons aussi la possibilité d'étudier comment le *signe-artefact* moteur des activités a été mis en œuvre tout au long de la séquence. Cette analyse inclura des réponses scannées de chaque individu selon les classifications préalables mentionnées ci-dessus. Des croisements entre les *a priori* de la séquence (cf. Section 6.3.2) et les réponses effectives des élèves seront bien sûr inclus.

8. Transcription d'un extrait des vidéos. Analyse de l'Espace de Travail Mathématique des élèves dans un milieu collaboratif : cette analyse intégrera les outils d'analyse concernant le potentiel sémiotique du signe-artefact ainsi qu'une étude des discours mathématiques produits dans un milieu d'interactions sociales intégrant un processus d'apprentissage-enseignement.

Chapitre 6

Les premiers pas dans la conception des nos séances expérimentales

6.1 Introduction

L'étude des travaux historiques et épistémologiques de la relation entre calcul et géométrie, et notamment entre multiplication et géométrie, nous a amené à l'analyse de la multiplication de Descartes, dont nous avons appris sa correspondance avec la multiplication de nombres complexes et sa démonstration par le théorème de Thalès si important dans l'enseignement des mathématiques en France. Ainsi, à partir de la configuration géométrique de la multiplication de Descartes, nous avons commencé à travailler dans la phase expérimentale de cette recherche, c'est-à-dire dans la conception d'un questionnaire diagnostique et des séquences d'apprentissage au lycée et au collège afin de répondre à notre deuxième question de recherche : **Peut-on identifier et différencier des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM personnel (ou approprié) des élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?**

Le premier pas dans la conception de deux séquences d'apprentissage liées principalement à la signification géométrique de la multiplication de nombres relatifs et complexes a été l'élaboration et la mise en place d'un questionnaire dans quatre classes de Terminale S (cf. Annexe A) dans l'Ile de France.

Ce questionnaire correspond à un outil diagnostique et son objectif spécifique est de déterminer les possibilités des élèves de mobiliser des connaissances mathématiques préalables qui leur permettent d'interpréter, justifier et construire des relations multiplicatives en géométrie.

Les productions écrites des élèves résultant de la résolution du questionnaire de la même manière que des séquences d'apprentissage ont été analysées en suivant les critères décrits dans notre méthodologie. Dans ce chapitre, nous ne présentons que les résultats généraux de cette première intervention didactique, laquelle a bien justifié nos choix méthodologiques pour la conception de nos séquences d'enseignement. Nous signalons que pour accéder à l'analyse intégrale de la première partie de notre phase expérimentale, c'est-à-dire, du questionnaire, il est nécessaire de se diriger vers la section d'annexes. Vous trouverez donc dans l'annexe B l'analyse *in extenso* du questionnaire.

6.2 De l'analyse du questionnaire à la conception de séquences expérimentales d'apprentissage

Les analyses *a priori* et *a posteriori* du questionnaire nous ont permis d'identifier les points faibles ainsi que la richesse d'un travail expérimental, dans une classe scientifique à la fin du lycée.

Le questionnaire, un outil pour la collecte de données concernant les possibilités pour les élèves de mettre en relation multiplication et géométrie, était destiné à être le point de départ dans la conception d'une séquence d'enseignement de la multiplication de nombres relatifs et complexes au collège et au lycée. Aujourd'hui, lorsque l'analyse des productions a déjà été effectuée, nous reprenons notre objectif de départ puisque nous avons constaté les atouts dans le choix des contenus ainsi que dans la formulation des questions faisant partie du questionnaire.

La représentation géométrique de la multiplication de Descartes, la preuve par le théorème de Thalès et leur influence dans la reconnaissance, le traitement et la conversion du produit dans des différents registres de représentation : la complexité cognitive de la tâche à réaliser

Le travail d'analyse de la multiplication de Descartes mis en place tout au début du questionnaire a bien influencé le travail à réaliser par les élèves par la suite jusqu'à la même représentation géométrique du produit de deux nombres complexes.

De ce fait, prouver grâce au théorème de Thalès a permis aussi la mise en relation entre certains énoncés et les représentations géométriques qui leur étaient associées, là où la multiplication de Descartes n'était plus explicitement présente.

Comme nous l'avons déjà dit, grâce à ce travail initial, il s'est produit "une correspondance entre l'expression d'un même objet mathématique, la multiplication, dans deux registres de représentation différents : la représentation géométrique de la multiplication de Descartes et la justification algébrique des segments proportionnels dans l'îcone de Thalès". En d'autres termes, la possibilité de justifier la configuration géométrique de la multiplication de Descartes à travers le théorème de Thalès a permis de mettre en place une relation entre le produit représenté dans un cadre géométrique (registre non discursif) et la multiplication résultante des relations de proportionnalité associées aux segments constituant la configuration. De fait, l'interprétation géométrique de l'expression algébrique correspondant à une homothétie et même celle liée à une similitude dans les questions *1.b*, *1.c* et *1.d* a bien permis la mis en place, par les élèves, d'un processus de conversion (Duval, 2006a). Ceci leur a permis, soit de construire soit de dessiner la multiplication correspondante.

En outre, nous dirions que la *médiation* du théorème de Thalès a permis plusieurs réponses dans le cadre géométrique, même là où elles étaient inopinément demandées, comme par exemple, dans la question 1.b. De plus, l'analyse de la configuration géométrique donnée dans la deuxième question — laquelle correspond à une configuration ayant la même structure que celle de la multiplication de Descartes mais qui a été située dans le plan complexe —, a sans doute mobilisé les connaissances correspondantes aux propriétés qui mettent en relation les éléments qui la constituent (colinéarité, homothétie, droites parallèles). A partir de ce constat, nous avons réfléchi au fait que la justification de ce produit par le théorème de Thalès, ainsi que son analyse par décomposition et composition de ses éléments pourrait favoriser la prise de conscience d'une représentation géométrique de la multiplication. Le produit a été implicitement cherché dans la recherche explicite d'une affixe, de même qu'il a été implicitement représenté par une icône du théorème de Thalès.

Un autre élément à rajouter concerne la prise en compte de la figure donnée dans l'énoncé et les procédures de résolution des élèves. Par exemple, toujours en prenant en compte la deuxième question, il y a une concordance entre les interventions faites dans la figure et les procédures des élèves présentées dans un registre algébrique. Comme nous l'avons déjà mentionné, dans cette question, *quel que soit le point de départ, la proportionnalité a été toujours mise en évidence soit en termes de modules soit en termes de normes de vecteurs. Parfois les calculs n'ont pas été explicités, mais des relations entre les segments constituant la configuration peuvent faire appel à une transposition de la méthode de Descartes, laquelle a été exprimé soit dans un cadre algébrique, soit dans un cadre géométrique*. Ceci nous fait réfléchir à la possible existence d'un processus de *visualisation*, grâce à la reconnaissance d'*une multiplication en géométrie* mais qui n'a été interprétée qu'avec des éléments algébriques.

De ce fait, nous pouvons dire que nous avons trouvé *a posteriori* des résultats très intéressants donnant des réponses aux questions suivantes :

- Trouvons-nous parmi les réponses des élèves un lien entre multiplication et géométrie ?
- Plus spécifiquement, peuvent-ils décrire avec des éléments géométriques les relations entre les segments qui composent la construction géométrique de la multiplication de Descartes ?

– Est-ce que certaines réponses comportent des relations de proportionnalité entre les segments, des références à la colinéarité, ainsi que des relations portant sur des transformations dans le plan comme l'homothétie et la rotation ?

Par ailleurs, il convient également de réfléchir par rapport à cet enjeu sémiotique prédéterminé par nos choix dans la constitution du questionnaire, lequel a été visiblement pris en compte dans les réponses des élèves, par exemple, la correcte mise en relation entre le produit complexe représenté algébriquement et celui représenté géométriquement. Néanmoins, cet enjeu a aussi porté des contraintes dans les processus de résolution mis en place par les élèves. Par exemple, certains élèves ont eu beaucoup de difficultés à interpréter ce que "représenter géométriquement" ou "représentation géométrique" de la multiplication voulait dire.

D'autres difficultés d'interprétation ont été identifiées dans la quatrième question, là où certains élèves ont bien voulu transposer la construction du produit de Descartes à la construction du produit de deux nombres complexes. Ces difficultés rendent compte de la complexité cognitive de la tâche demandée ainsi que des limitations dans le raisonnement mathématique mis en œuvre par des élèves d'une classe scientifique à la fin de la scolarité. Un des exemples donnés dans l'analyse du questionnaire rend clairement compte de la non considération de l'angle nul dans la construction du produit en *essayant* de transposer la construction du produit de Descartes à la construction de la multiplication de deux nombres complexes.

L'interprétation du processus dans les termes de l'ETM : la question des paradigmes le structurant

Dans le termes de l'Espace de Travail Mathématique et par rapport aux interactions entre les composantes des plans épistémologique et cognitif, les registres de représentation en jeu et les résultats du questionnaire, nous avons observé la trajectoire suivante : les élèves, face au questionnaire (milieu matériel papier-crayon), se sont mis à la recherche de réponses à des questions exigeant la mise en fonctionnement d'un jeu de cadres et des changements de registre de représentation comme les seuls moyens d'arriver à une réponse correcte. L'appropriation de l'ETM a déterminé la compréhension personnelle de chaque énoncé de même qu'elle a déterminé les processus cognitifs à privilégier ainsi que le paradigme géométrique organisateur de l'ETM personnel des élèves. Cette organisation leur permet de répondre aux questions posées, en arrivant, dans la plupart de cas étudiés aux réponses qui correspondaient avec celles qui étaient attendues, ceci à l'intérieur d'une interaction effective avec le milieu matériel proposé par l'enseignant (et conçu par le chercheur), dans lequel ils devaient décoder (Perrin, 2003) les intentions de la situation.

Voici un schéma qui rend compte de l'interaction inhérente à la trajectoire ci-dessus, où nous situons notre première expérimentation, en lien avec un milieu (Brousseau, 1998) expérimental et à l'Espace de Travail Mathématique personnel de l'élève :

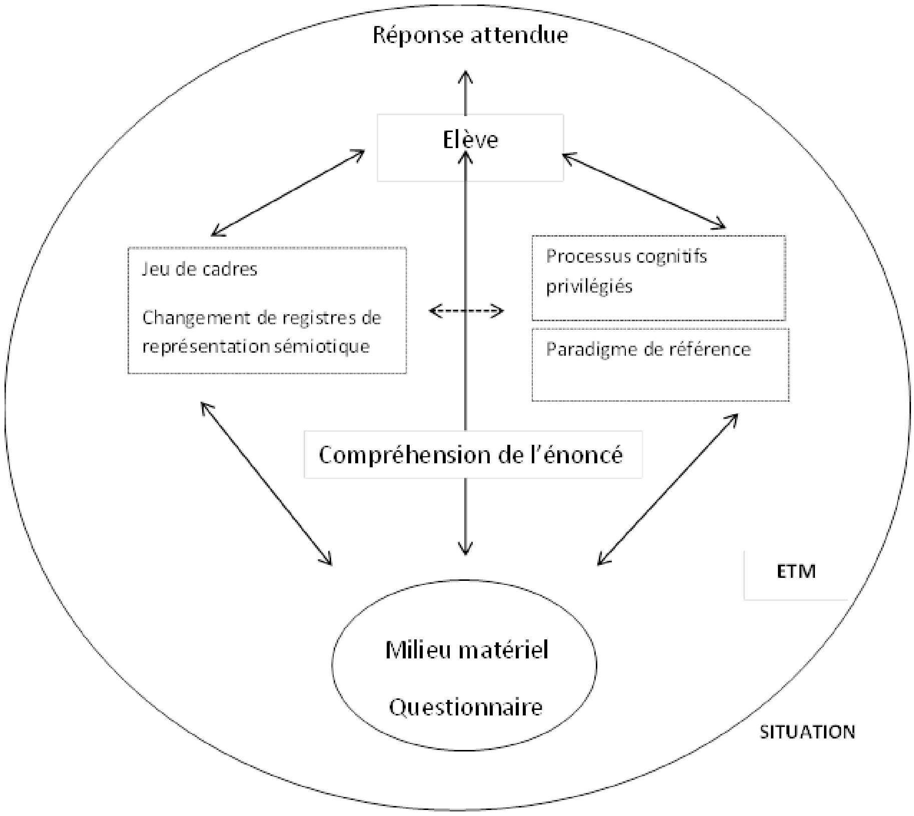


Figure 6.1 –

La mise en relation entre les représentations géométriques et les énoncés de la première et de la deuxième question nous a permis de constater l'existence d'un jeu entre les deux paradigmes géométriques correspondants au niveau scolaire : notamment, nous avons identifié la mise en œuvre d'une Géométrie II morcelée (Kuzniak, 2010), ceci puisque les problèmes posés dans chaque question ont été résolus en faisant appel aux propriétés géométriques évoquées par chacune des représentations géométriques données. Par contre, les représentations en question constituent aussi ce que nous appelons *une icône*, une icône qu'il suffit d'observer à ce niveau de l'enseignement pour identifier les propriétés appropriées pour la résolution des problèmes posés. C'est le cas d'Ayuma, qui a effectivement donné des réponses centrées dans l'observation de la composition figurale donnée. Cette pensée intuitive oriente une étude locale et immédiate de la représentation géométrique en question. Néanmoins, pourrions-nous dire que cette intuition pourrait bien être un point de départ encore valide à ce niveau de l'enseignement ? En effet, même s'il s'oppose à ce qui est institutionnellement attendu, il favorise le raisonnement conduisant à la construction du sens des objets mathématiques.

Tout cela nous conduit à des réflexions portant sur l'existence de cette Géométrie mixte qui n'est pas caractéristique de ce niveau de l'enseignement mais qui a été probablement le produit de notre propre influence : nous avons élaboré un questionnaire dont l'établissement des relations entre ses composantes permettait *a priori* un degré de liberté qui pourrait produire cet enjeu, ce *glissement délibéré*, pour favoriser la mise en relation entre multiplication et géométrie, grâce à l'interaction de plusieurs registres de représentation sémiotique à l'intérieur d'un ETM idoine et personnel non-habituel à ce niveau de l'enseignement en France. Ceci dans la recherche de la détermination des possibilités des élèves de mobiliser non seulement des connaissances mathématiques préalables mais aussi de leur raisonnement mathématique en accord avec leur formation scientifique.

Les réponses attendues

Nous faisons juste une petite remarque concernant le constat que plusieurs réponses d'élèves ont bien montré des procédures mathématiques attendues (cf. Tableaux de classification de réponses attendues et réponses des élèves). Ceci nous permet de valoriser nos choix par rapport aux questions et à l'ordre dans lequel nous les avons établies (cf. Annexe A). On peut penser que tout cela a favorisé la pertinence des réponses des élèves face aux questions où des démarches d'investigation fondées dans l'observation-description des composantes des énoncés se sont effectivement produites. Sur ce point, nous excluons bien sûr les réponses aux deux dernières questions, étant donné le nombre réduit de réponses attendues parmi les réponses des élèves, par contre, l'absence d'autres réponses ainsi que la quantité de non-réponses nous situe encore une fois dans une réflexion portant sur la complexité et la décontextualisation de la tâche demandée.

L'interprétation du travail des élèves et le retour à nos approches théoriques complémentaires

Finalement nous avons un dernier aspect à souligner, lequel nous semble un élément clé pour la suite de nos expérimentations. Nous parlons de la difficulté que nous avons rencontrée pour interpréter le raisonnement des élèves à travers l'analyse de leurs réponses au questionnaire. De fait, nos interprétations ne peuvent être considérées que comme des conjectures. Par exemple, plusieurs de nos assertions ressemblent à celle ci : *il n'a pas parlé explicitement de transformations, mais il les a probablement considérées, étant donné qu'il a fait référence au "sens contraire" et à la "position de points en fonction de k"*. De la même manière nous avons eu du mal à interpréter les réponses à la question 3 : *quelle compréhension de iz ?*. Et encore, nous *croyons* que Léo dans sa réponse à la dernière question, *a bien fait de profondes réflexions portant sur le traitement possible de la multiplication dans différents registres de représentation*.

Ces références confirment notre intention de mettre en place une expérimentation où le travail mathématique soit réalisé d'une façon collaborative, de sorte que le *discours* soit verbal, audible et plus facilement *interprétable* :

> "One of the reasons for choosing a participation framework is that it studies and makes claims only about phenomena which can be observed ; about what is actually said and done, about people's participation in an activity. The problem when it comes to educational research is to find ways of researching not solely what is said and done, but also what goes on in the mind of the students, out of reach for direct observation. Many scientists in different fields spend their lives researching things that are impossible to observe directly. Black holes, quarks, wind and social gender are phenomena that have to be observed indirectly.[...] In the commognitive perspective described by Sfard only participation in interpersonal communication is observable and therefore the only thing about which claims can be made in an educational setting. Change that occurs within an individual, i.e. change in the intrapersonal discourse, is labelled 'individualizing the discourse' and 'making it a discourse for oneself' (Sfard, 2008)". (Kilhamn, 2011, p. 65-66)

Ainsi, nous revenons à notre cadre théorique et à l'intégration de l'Espace de Travail Mathématique dans un processus socioconstructiviste de l'apprentissage. De la même manière, nous intégrons à l'Espace de Travail Mathématique un outil *médiatique* (une icône du théorème de Thalès) qui vise à favoriser l'action des *genèses* sémiotiques et discursives pour la construction collaborative des significations de la multiplication en géométrie.

6.3 Les séances d'apprentissage : introduction à la description et à l'analyse

En considérant que ce travail de thèse porte sur les significations et les représentations géométriques de la multiplication et en prenant en compte les résultats de l'analyse du questionnaire diagnostique, nous avons conçu deux séances expérimentales (cf. Annexe C) visant à ce que des élèves de deux niveaux différents de l'enseignement en France puissent mettre en lien la multiplication et ses significations géométriques.

Or, le « caractère fondamental des démarches de description pour l'acquisition des connaissances scientifiques » (Duval, 2003, p. 57) a bien été une source d'inspiration pour la conception de ces séances. De ce fait, nous avons pris comme point de départ une configuration géométrique qui représente la multiplication de Descartes. A travers cette configuration que nous considérons aussi comme un outil de médiation sémiotique, nous envisageons de conduire les élèves vers une signification géométrique de la multiplication de nombres relatifs et complexes, en montrant d'une façon géométrique et visuelle la correspondance entre la multiplication et certaines transformations dans le plan.

L'étude de l'appropriation de l'ETM par les élèves est un aspect central dans nos analyses. Dans la présentation des réponses attendues aux questions des séquences nous allons aussi rendre compte des *a priori* associés aux possibilités d'entrée à l'Espace de Travail Mathématique. Comme nous l'avons déjà mentionné l'entrée classique fait référence prioritairement au paradigme géométrique et aux connaissances mathématiques qui donnent une structure à l'ETG (entrée épistémologique). Par contre, pour nous, une entrée cognitive est aussi envisagée, comme un point de départ alternatif pour certaines des réponses attendues.

6.3.1 Contextualisation des séances d'apprentissage en fonction des programmes officiels : pour une insertion des séances expérimentales dans la progression des enseignants

Les trois aspects essentiels auxquels nous avons fait référence dans l'introduction à cette section, c'est-à-dire multiplication, significations et géométrie, ont une place dans les programmes officiels français comme nous l'avons aussi déjà étudié (cf. Chapitre 3), par contre, cette place n'est pas nécessairement en relation directe avec nos propositions didactiques. De ce fait, nous avons repris certains éléments explicités dans les programmes officiels, qui nous permettent de contextualiser nos propositions de sorte que les enseignants faisant partie de l'expérience puissent l'insérer sans problèmes dans leur progression d'enseignement.

D'une part, le contenu mathématique en question — la multiplication de nombres relatifs et de nombres complexes — correspond à ce qui est prévu comme connaissance mathématique dans les deux niveaux de l'enseignement en France que nous avons choisis : produit de nombres relatifs en classe de Quatrième (Programmes officiels, 2008, p. 28) et produit de nombres complexes en classe de TS (Programmes officiels, 2001, p. 69) ; (Programmes officiels, 2011, p. 8).

D'autre part, dans ces deux niveaux de la scolarité, les connaissances géométriques à acquérir sont bien en accord avec notre projet. En classe de Quatrième, l'introduction des propriétés du théorème de Thalès nous permet d'établir un lien entre multiplication et géométrie à travers notre proposition didactique. Dans la classe de Terminale S si bien l'introduction géométrique des nombres complexes explicitée en 2001 perd de l'importance dans le nouveau projet 2011, mais la représentation géométrique de ces nombres est encore explicite comme un des contenus en vigueur.

Par rapport à la signification du produit en classe de Quatrième, cela se trouve à l'intérieur des programmes dans le contexte de la *construction du sens* des nombres relatifs :

> « L'apprentissage des règles de calcul sur les nombres relatifs est en relation très forte avec les significations qui leur sont accordées, dès lors qu'on souhaite ne pas se limiter à l'enseignement de règles formelles, mais qu'on souhaite expliquer et justifier ces règles ». (Programmes officiels, 2008, p. 9)

Ceci dit, il n'y a pas de proposition d'un traitement hors des cadres numérique ou algébrique du produit, ce qu'il nous semble très intéressant d'introduire comme une nouvelle approche étant donné que ceci constitue une rupture avec les usuelles références/associations à des situations usuelles qui font partie du traitement de la somme et de la différence des nombres relatifs ; de la même manière les propriétés des opérations qu'il faut transposer à ces nouveaux nombres, ne sont justifiées que dans un cadre numérique ou algébrique.

En classe de Terminale S, nous situons cette séance et la prise du sens du produit de nombres complexes dans le cadre de la « diversité de l'activité de l'élève », où des activités entraînant les élèves à la recherche, l'expérimentation, et le raisonnement, doivent intégrer les activités proposées en classe ainsi que celles qui ont lieu hors du travail scolaire. En outre, la citation suivante soutient d'une façon particulière notre proposition, étant donné que dans cette séance la multiplication de nombres complexes est mise en relation avec sa signification, à travers la géométrie, dans une situation portant sur l'analyse d'une représentation géométrique et d'un texte historique concernant la multiplication de Descartes :

> « Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathé-

maticiens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts » (Programmes officiels, 2011, p. 3).

6.3.2 Description générale de la mise en place des séquences d'apprentissage : scénario

Les séquences (cf. Annexe C) seront mises en place par l'enseignant de chaque classe. Une séance de 2 heures est prévue et le travail sera réalisé en groupes d'entre deux et quatre élèves.

La chercheuse sera une invitée observatrice et une caméra sera installée dans chacune des classes pour que nous puissions retenir les moments de questionnement d'un des groupes de travail ainsi que la dynamique des interactions entre l'enseignant et la classe entière.

Étant donné que l'analyse des réponses des élèves se fera, premièrement, en fonction des productions écrites des élèves, l'enseignant devra souligner tout au début de la séance, *d'interpréter les questions, conjecturer, tout écrire, ne rien effacer*. En outre, grâce à l'information obtenue par la caméra installée sur un groupe particulier dans chacune des classes, nous pourrons accéder à une analyse plus profond des processus de médiation sémiotique menés à l'intérieur des ces groupes.

Une courte introduction par rapport à l'objectif des séances sera donnée aux élèves par l'enseignant : *une activité non-évaluée, qui vise à identifier vos possibilités de mettre en place des connaissances mathématiques préalables dans un contexte de classe non traditionnel*. L'enseignant devra inclure dans son introduction la consigne suivante : *à la fin de la séance un représentant de chaque groupe fera une présentation au tableau sur une des réponses travaillées au cours de la séance*.

Des fiches de travail pour chaque élève seront distribuées (cf. Annexe C). Pour les deux niveaux d'enseignement toutes les figures seront données annexes et séparées des questions de sorte que les manipulations faites sur la figure puissent facilement être identifiées. En outre, un intérêt particulier à l'identification du rôle donné à la figure fait partie de cette modalité, ce qui correspond à une méthodologie différente de celle que nous avons suivie avec le questionnaire où la figure et l'énoncé avaient le même statut sur la feuille de travail. La figure, serait-elle prise en compte pour répondre aux questions posées ? Comment ? Trouverons-nous des traces permettant d'identifier les interventions faites par élèves sur chaque figure ?

En classe de Terminale S, le rôle du professeur comme guide du travail des élèves sera plutôt restreint (cf. Section 8.1) et ses interventions visent plutôt le déblocage. Par contre, son rôle motivateur est essentiel pour favoriser les échanges dans chaque groupe d'élèves.

Le temps limité des séances empêche la mise en place d'une situation de travail collective plus participative avec des *allers-retours* entre une question et une autre. Sur cet aspect nous reviendrons plus tard, surtout quand nous décrirons ce qui s'est passé en classe de Quatrième (cf. Section 7.1.1).

Une phase d'institutionnalisation n'a pas non plus été prévue étant donnée le caractère expérimental des séances. Par contre, nous avons proposé aux enseignants une ou deux phases de bilan selon les besoins spécifiques de chacune des classes (cf. Section 8.1).

En Terminale S, la séance finira par une présentation de vidéo de 15 minutes : le chapitre cinq de la vidéo *dimensions par Jos Leys - Etienne Ghys - Aurélien Alvarez*, dédiée aux nombres complexes. C'est un film qui « cherche avant tout à mettre en évidence le côté géométrique de ces nombres complexes". Dans cette vidéo, comme le disent ses réalisateurs, « si les points d'une droite sont de nombres, on doit pouvoir comprendre géométriquement la signification des opérations élémentaires entre les nombres : l'addition et la multiplication. La clé de cette compréhension est dans l'idée de *transformation* ». Cette même idée étant le fil conducteur de notre travail de recherche, nous trouvons très pertinente cette deuxième séance, qui a pour but principal celui de motiver les élèves à la *recherche en mathématiques* leur permettant d'étudier les relations entre nombres et géométrie.

En classe de Quatrième, des élèves passeront au tableau à la fin de la séance pour montrer et exprimer leurs résultats. L'enseignant aura donc l'opportunité de faire le point sur ce nouveau regard donné à une notion mathématique déjà connue — la multiplication — dont les significations géométriques n'ont pas été travaillées.

Chapitre 7

Les séances expérimentales en classe de Quatrième

7.1 Déroulement de la séance en classe de Quatrième : procédures de résolution, entrée dans l'ETM, commentaires et interventions de l'enseignant

PREMIERE QUESTION

Travail avec l'annexe 1

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication.

I. Observer et interpréter la configuration « Figure A » pour répondre à la question suivante :

- **a.** En définissant AB comme l'unité, Descartes affirme que la multiplication de BD par BC permet d'obtenir BE comme produit. Est-ce vrai ? Qu'en pensez-vous ? Expliquez votre réponse.
- **b.** b. Sur la même configuration (Figure A), placer un point D' sur la demi-droite $[BD)$ et construire E' tel que BE' soit le produit de BD' par BC.

Annexe 1

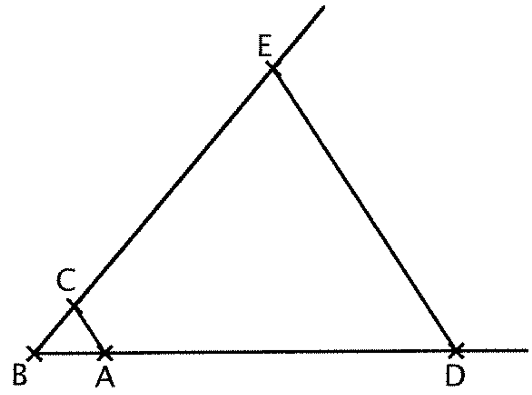


Figure 7.1 –

Introduction de l'enseignant (suggestion)

(Cette introduction est la même pour la classe de Terminale S).

- Une activité non-évaluée, qui vise à identifier vos possibilités de mettre en place des connaissances mathématiques préalables dans un contexte de classe non traditionnel. Vous êtes libres d'interpréter les questions d'après ce que vous comprenez et de conjecturer en fonction de l'information donnée dans l'énoncé et sur figure. Il faudra tout écrire et ne rien effacer puisque tous vos brouillons seront à rendre. S'il nous reste du temps à la fin de la séance un représentant de certains groupes fera une présentation au tableau sur une des réponses travaillées au cours de la séance et nous allons discuter un peu tous ensemble.

Procédures de résolution, entrée dans l'ETM et commentaires

Une entrée possible à l'Espace de Travail Mathématique pourrait bien se produire par le plan épistémologique. De ce fait, les réponses attendues pourraient inclure des références à la proportionnalité existante entre les segments composant la configuration. Nous tenons à ce que les élèves fassent appel aux propriétés du théorème de Thalès introduites par les connaissances « sur les triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine » (Programmes officiels, 2008, p. 30). La possibilité d'une entrée par GI en mesurant directement sur la figure pour prouver le produit, fait aussi partie de nos attentes. En d'autres termes, soit ils feront appel au parallélisme des droites (AC) et (DE) en justifiant le produit par la proportionnalité des segments constituant la construction de Descartes, soit ils vont mesurer les facteurs, multiplier leurs mesures dans un registre numérique puis rapporter le produit et conclure avec un argument lié à l'approximation des mesures.

Nous précisons qu'il n'y a rien à rejeter de ce que les élèves puissent faire pour justifier la véracité de la représentation géométrique du produit de Descartes. Il faudra juste répondre à la première question pour montrer ensuite leurs possibilités de faire, par eux-mêmes, une première construction du produit avec d'autres facteurs de même nature que dans l'exemple de Descartes.

Interventions de l'enseignant en cas de blocage

(Les interventions de l'enseignant sont les mêmes pour la classe de Terminale S).

Inviter les élèves à observer la configuration donnée, à la décrire à travers la description des éléments qui la constituent : Que pouvez-vous dire de cette configuration à partir de l'information donnée sur la figure ? Quels éléments la composent ? Y a-t-il une relation entre eux ? Comment pourriez-vous l'identifier ?

Il faudra ne mentionner ni Thalès ni la possibilité de mesurer. Si jamais cela n'avance pas, on pourrait :

- Proposer l'utilisation d'outils géométriques : « Avez-vous pensé à l'utilisation des outils géométriques ? Vous pourriez vous en servir si vous voulez… »
- Inclure une intervention plus directe par rapport au théorème de Thalès : « Quels liens entre les facteurs et le produit ? Comment pourriez-vous l'identifier ? Expliquer ».

A toute proposition des élèves, nous allons juste dire : « D'accord, essayez, pourquoi pas, n'oubliez pas d'expliquer par écrit votre procédure… Cela sera utile pour la suite.

DEUXIÈME QUESTION

Travail avec l'annexe 2

II. Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

a. Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :

- Sachant que $BA = 1cm$, placer D entre B et A.
- Construire E pour que BE donne le produit de la multiplication de BD par BC.

b. Décrivez votre construction et expliquez pourquoi elle peut être considérée comme analogue (avec les mêmes caractéristiques) à la construction de Descartes.

Annexe 2

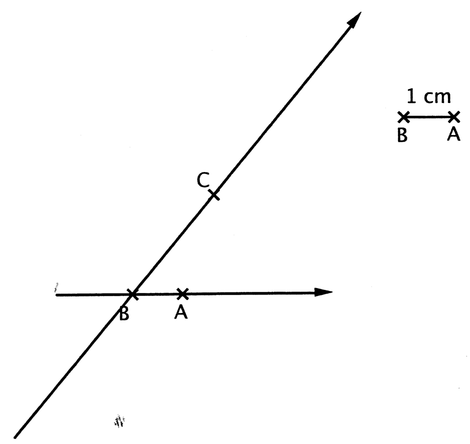


Figure 7.2 –

Procédures de résolution, entrée dans l'ETM et commentaires

(Les procédures de résolution sont les mêmes pour la classe de Terminale S. Par contre il y a certaines différences dans les réponses attendues).

Nous demandons la construction d'une représentation géométrique d'un produit qui soit essentiellement analogue à la configuration de Descartes mais qui ait un des facteurs de différente nature.

Une entrée épistémologique dans l'ETM permettrait la mise en oeuvre du processus cognitif de construire, ceci puisque cette construction devrait être réalisée sur la base d'une configuration incomplète donnée(cf. Annexe C) dans laquelle il faut transposer les propriétés de la multiplication de Descartes. Ainsi, la description que les élèves peuvent faire de leurs constructions nous permettra l'accès à une possible constatation de l'existence d'une compréhension de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes. Une fois que l'action a commencé à l'intérieur de l'Espace de Travail Mathématique approprié par les élèves, le processus cognitif de construire devrait les amener à l'établissement d'une concordance entre le nouveau produit représenté par eux-mêmes (et qui devra être inférieur à l'un des facteurs) et celui représenté dans la construction de Descartes ; nous parlons d'une concordance dans le sens de la signification du produit. Ceci dit, leurs possibilités d'acquérir cette compréhension du produit dépendra de la façon dont ils auront pris en charge la première question. Une entrée par la mesure devrait sans doute évoluer.

Nous voyons clairement la complexité des processus cognitifs mis en jeu. Notre intention de transmettre aux élèves, à partir de cette question et de la configuration donnée, l'idée de mouvement met ceci en évidence. Le produit s'est déplacé en se situant maintenant entre le point d'origine des facteurs et le facteur supérieur à l'unité. Le changement de la mesure et/ou de la nature d'un des facteurs implique le changement de la position du produit. Particulièrement dans notre cas, ce mouvement est déterminé d'une part, par la longueur du facteur BD inférieur à l'unité, ce qui implique que les points sur (BC) doivent être placés alignés dans la position B, E, C, le produit BE étant de longueur inférieure au facteur BC. Nous visons à ce que les élèves puissent se rendre compte du fait que la position du produit dans une représentation géométrique de la multiplication de Descartes est étroitement liée à la nature des facteurs. Cette idée du déplacement du produit sera tout d'abord implicite, mais il faudra la faire ressortir à travers des petites interventions de l'enseignant étant donnée l'importance de cette observation pour répondre à la troisième question. Nous commençons en parlant de déplacement mais notre but est la transformation : le produit s'est déplacé en fonction de la nature des facteurs. Ce déplacement est le résultat d'une transformation opérée par un des facteurs multiplicatifs sur l'autre, ce qui à ce moment de la séance devrait émerger sous l'idée de *réduit ou élargi*. En d'autres termes, nous dirions que les élèves pourraient commencer à s'apercevoir, à ce moment de la séance, des significations métaphoriques du produit : *le produit est un élargissement ou une réduction en géométrie*.

Finalement, nous présentons la totalité des réponses que nous envisageons pour cette question, lesquelles se résument dans les éléments suivants. Ces éléments peuvent se présenter séparément ou intégrés dans une seule réponse :

- Construction de Descartes (exprimée dans leurs propres mots), prise en compte des parallèles et théorème de Thalès ;
- Référence à la position du produit en fonction de la position des facteurs ;
- Référence à la valeur et à la position du produit en fonction de la position ou de la valeur des facteurs ;
- Références aux réductions ou agrandissements d'un facteur en fonction de l'autre ;
- Théorème de Thalès ;
- Théorème de Thalès, mesures de segments puis théorème de Thalès sur la figure ;
- Pas de réponse.

Interventions de l'enseignant en cas de blocage

Dans la première conception de cette séance, les interventions de l'enseignant en classe de Quatrième étaient exactement les mêmes que celles prévues pour la classe de Terminale S. Néanmoins, certaines modifications ont été appliquées lors de la deuxième expérimentation en classe de Quatrième suite à l'incorporation d'un logiciel de géométrie à utiliser par l'enseignant dans les phases de bilan. Nous présentons ces changements dans la partie *remarque*, laquelle a été insérée à la fin de la description des interventions de l'enseignant pour la deuxième et troisième questions.

Des interventions à l'intérieur de cette question peuvent tout simplement correspondre au fait d'insister sur l'établissement des relations entre leurs réponses à la première question et la description et l'explication correspondantes à la deuxième.

D'autre part, il serait intéressant et nécessaire de les faire réfléchir sur la position du produit en les invitant à la décrire et à écrire ses observations : « le produit, où est-il situé ? Pourquoi sa position n'a plus la même place que dans la première question ? De quoi dépendra donc la position du produit dans une représentation géométrique de la multiplication comme la nôtre ? La position du produit dans la représentation géométrique de la multiplication, que veut-elle dire ? D'ailleurs, la position du produit est le résultat d'une opération mathématique, c'est-à-dire elle est le résultat d'une action : nous pourrions dire qu'un facteur x agit/opère sur un facteur y. Dans notre cas, ce facteur x (BD), que fait-il sur le facteur y (BC) ? ».

Remarque à considérer nécessairement lors de la deuxième expérimentation

(Si nécessaire, il faudra peut-être expliquer les concepts de *facteur* et de *produit*).

Poser cette dernière question à l'aide du produit représenté sur le logiciel de géométrie GeoGebra en faisant des *mouvements* sur la représentation géométrique. A un moment donné, il faudra situer le facteur BD de sorte qu'il soit confondu avec l'unité : on ne verra qu'un triangle et, dans la construction à côté, on ne verra qu'une seule longueur et un point. Ceci aidera à s'exprimer sur le concept d'*opération*, opération faite pour un des facteurs sur l'autre qui résultera dans une réduction ou un agrandissement en géométrie.

TROISIÈME QUESTION

Travail avec l'annexe 3

III. Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point A d'abscisse $+1$ et du côté négatif le point D d'abscisse -2.

- **a.** a. Pouvez-vous expliquer le fait que dans cette configuration géométrique, BE donne toujours le produit de BD par BC ? Comment ?
- **b.** Pour conclure, décrire la représentation géométrique du produit entre un nombre négatif et un nombre positif. Considérez la position des facteurs et du produit par rapport au point B et au segment $[BC]$.

Annexe 2

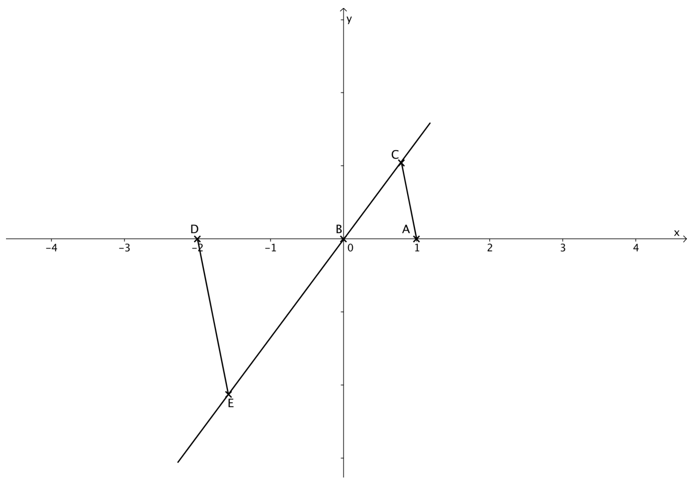


Figure 7.3 –

Procédures de résolution, entrée dans l'ETM et commentaires

Ce moment de la séance porte sur l'analyse d'une construction géométrique située sur la droite numérique. Pouvoir répondre aux questions de ce troisième moment de la séance est directement liée aux moments précédents, c'est-à-dire la justification du produit sera la même.

Dans cette nouvelle configuration géométrique, nous pouvons observer qu'il y a une relation étroite entre ses codages et ceux des configurations précédentes. Par contre, l'unité n'est plus exprimée en centimètres et de plus un des facteurs est explicitement qualifié de nombre négatif. C'est précisément à ce moment où la tâche devient plus complexe pour les élèves qui étaient restés dans la mesure. Maintenant le parallélisme de droites devient une conjecture à renforcer : Si (AC) et (DE) ne sont pas parallèles la proportionnalité des segments n'existe pas.

En outre, le déplacement du produit dont nous avons parlé dans la question précédente sera toujours présent mais déterminé par l'existence d'un facteur négatif, où le produit BE sera placé de l'autre côté du point B par rapport au point C de sorte que les points sur la droite seront toujours alignés mais dans l'ordre E, B, C. Cette observation, déjà initiée dans la question précédente sera clé pour les élèves au moment de décrire la représentation géométrique du représentant du produit E. La recherche pourrait aussi se concentrer sur le théorème de Thalès et ils pourraient exprimer leurs réponses en termes de distances des points à l'origine du repère. Une justification par la règle de signes est aussi attendue.

Dans la description de la représentation géométrique du produit, nous nous attendons à une référence à la position du produit à laquelle nous avons déjà fait référence dans la question précédente. Le déplacement du produit dont nous avons parlé dans la question précédente sera toujours présent mais il sera déterminé par l'existence d'un facteur négatif, où le produit BE sera placé *de l'autre côté* du point B par rapport au point C de sorte que les points sur la droite seront toujours alignés mais dans l'ordre E, B, C. Cette observation, déjà initiée dans la question précédente sera un élément clé pour les élève. Ainsi, la position du produit dans la représentation géométrique de la multiplication, que veut-elle dire ? Et dans ce cas spécifique où un des facteurs est négatif ? On revient à ce qu'on a dit dans la question précédente : la position du produit est le résultat d'une opération mathématique, c'est-à-dire elle est le résultat d'une action : nous pourrions dire qu'un facteur a agit/opère sur un facteur b. Ce facteur a, que fait-il sur le facteur b ? »

(Les paragraphes suivants concernant l'entrée à l'Espace de Travail Mathématique sont les mêmes pour la classe de Terminale S).

Le plan cognitif de l'Espace de Travail Mathématique devient une entrée importante quand les questions portent sur la description de la multiplication, de sa représentation géométrique ou en d'autres termes de sa signification géométrique. La transposition du produit de Descartes à un produit opérant directement sur des nombres, représentés géométriquement, positionnés dans un plan, ne peut être que le résultat d'une assimilation du fait que le travail porte sur une *idée mathématique* qui sort complètement des connaissances traditionnelles de l'objet mathématique en jeu : les significations géométriques de la multiplication. Nous ne travaillons plus en ce moment par rapport aux techniques de calcul ni par rapport à la démonstration. Nous travaillons par rapport aux idées, et la compréhension de ces idées ne peut se produire que sous une entrée cognitive à l'ETM. Ceci sera possible grâce à une disposition implicite, non habituelle, mais mobilisable pour les élèves même si cela implique le fait de sortir des méthodes traditionnelles :

> "To overstress either techniques of formal proof or techniques of calculation is to shortchange students. Students have right to understand mathematics in terms of its ideas – and specially when the ideas are controversial and conflict with one another. Since a great many mathematical ideas are metaphorical, teaching mathematics necessarily requieres teaching the metaphorical structure of mathematics". (Lakoff & Nunez, 1997, p.85)

Compte tenu de ce qui précède, nous sommes sur le point de ce que Sfard (1991, 1994) appelle *reification*. La multiplication peut devenir interprétable géométriquement. Les transformations, telles que des agrandissements ou des réductions peuvent bien devenir des déplacements pour décrire la représentation géométrique du produit :

> "Reification is the birth of the metaphor of an ontological objet [...]. Reification – a transition from an operational to a structural mode of thinking – is a basic phenomenon in the formation of a mathematical concept". (Sfard, 1994, p. 53, 54)

Finalement, cette question est la clé pour commencer à déterminer l'évolution et la puissance de notre signe artefact ; est-il bien un intermédiaire entre l'icône du théorème de Thalès et la représentation géométrique de la multiplication associée à des transformations dans le plan ? Cette question, pourra-t-elle faire émerger une interprétation métaphorique de la multiplication au milieu des interactions sociales où cette question sera posée ? (cf. Chapitre 4) : "as we see it, knowledge appropriation is achieved through the tension between student's subjectivity and the social means of semiotic objectification" (Radford, 2000, p. 241).

Pour finir cette analyse nous donnons d'une façon simplifiée tous les éléments de réponse possibles à la question *3.a* et *3.b* dans les listes suivantes :

Question 3a :

- Conjecture des droites parallèles ; théorème de Thalès ;
- Expression de relations d'agrandissement d'un triangle et construction de son symétrique par rapport à l'origine du repère (symétrie centrale) ;
- Pas de réponse.

Question 3.b :

- Référence à la variation de la position du produit en fonction de la position ou de la valeurs des facteurs ;
- Règles de signes et référence à la valeur négative du produit ;
- Règles de signes et représentation de la configuration géométrique du papillon du théorème de Thalès pour l'expliquer ;
- Expression de la règles de signes en langue naturelle ;
- Référence à la variation de la position sur la droite (BC) du produit ;
- Pas de réponse.

Interventions de l'enseignant en cas de blocage

La médiation de l'enseignant , même si elle n'a été considérée que partiellement est toujours un élément clé dans cette séance expérimentale. Faire avancer la recherche dans une séance d'apprentissage sortant complètement de ce qui est habituel pour les élèves dépend non seulement des interactions entre les élèves mais aussi des interventions de l'enseignant dans chacun des groupes de travail.

Dans ce cas, l'enseignant doit inviter les élèves à revenir à la description de la configuration donnée. « Faites une comparaison entre cette configuration et la construction de Descartes : Quelles ressemblances et quelles différences ? Quelles conditions devraient être correspondantes entre les autres configurations et celle-ci pour que BE soit toujours la représentation du produit de BC par DE ? Identifiez-vous des relations entre les segments constituant cette configuration ? Lesquelles ? »

Par ailleurs, « dans la description de la représentation géométrique du produit, nous nous attendons à une référence à la position du produit comme nous avons déjà parlé dans la question précédente. Ainsi, la position du produit dans la représentation géométrique de la multiplication, que veut-elle dire ? Et dans ce cas spécifique où un des facteurs est négatif ? On revient à ce qu'on a dit dans la question précédente : la position du produit est le résultat d'une opération mathématique, c'est-à-dire elle est le résultat d'une action : nous pourrions dire qu'un facteur « a » agit/opère sur un facteur « b ». Ce facteur « a », que fait-il, maintenant, sur le facteur « b » ? ».

Remarque à considérer nécessairement lors de la deuxième expérimentation

En cas de blocage, l'enseignant reprendra les représentations géométriques sur GeoGebra, en faisant encore des mouvements dans la deuxième configuration correspondante à cette question. Si jamais la réponse à cette question ne pose pas de problèmes, une fois que tous les élèves aient fini, l'enseignant s'en servira de cette configuration en la montrant aux élèves de sorte qu'ils puissent enrichir leurs réponses à la dernière question. Ceci nous permettra de faire une comparaison entre leurs réponses et celles données par les élèves de la TS, lesquels n'ont pas eu la possibilité de visualiser les représentations géométriques de la multiplication en mouvement.

QUATRIÈME QUESTION

IV. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle signification géométrique pouvez-vous donner à la multiplication ?

Quelques réflexions générales par rapport au lien entre multiplication et géométrie :

En termes généraux, nous dirons que si l'on multiplie deux nombres naturels associés à des longueurs, le produit sera visiblement *une aire*. Si l'on multiplie des rapports de longueurs, dont un d'entre eux est à l'unité ce que l'autre est au produit, le produit est *une longueur*. D'ailleurs, le produit est aussi géométriquement visible comme une addition réitérée si on multiplie n fois une longueur ou n fois une aire. Et si $n < 1$ le produit sera une réduction. Quoi que l'on fasse la multiplication transforme. Et voici le mot clé : le produit est une transformation dans le plan. Cette interprétation de la multiplication jamais vue jusqu'à ce qu'on fasse des homothéties fait partie de la plus élémentaire des multiplications.

Est-il possible de percevoir cette signification de la multiplication ? Probablement il faut des travaux spécifiques où l'homothétie soit travaillée avec des petits enfants en représentant la multiplication par le prolongement ou le rétrécissement d'un élastique (Mason, 2010. *Entretien*). Mais, nos élèves, pourront-ils exprimer ce que la multiplication signifie en géométrie en lien avec l'idée de transformation ? Les activités proposées, seront-elles pertinentes ? Leurs expériences de description, analyse, explication et construction tout au long de cette séance, pourront-elles les amener à une telle observation ?

Les réponses des élèves pourraient faire référence à une synthèse de la séance ou bien elles peuvent faire une référence isolée aux contenus suivantes :

- Références à une réduction ou à un agrandissement.
- Références à un déplacement en mentionnant ou non la règle de signes.
- Référence aux éléments théoriques et géométriques constituant la multiplication tout au long de la séquence (Descartes, théorème de Thalès, longueurs, distances à l'origine du repère)
- Référence aux éléments dans chacun des produits représentés : description des techniques justifiant le produit (Thalès, règle de signes
- Référence à une variation du produit (position et signe) en fonction de la variation d'un des facteurs (rapport de proportionnalité implicite).

– Référence à la multiplication de Descartes.
– Référence à l'agrandissement ou à la réduction d'une surface.

Mise en commun :

Pour la mise en commun il est attendu que certains élèves passent au tableau montrer leurs conclusions. La réponse à partager sera la dernière question de la séquence. Le plus important est de les motiver à s'exprimer sur les observations qu'ils ont faites pour arriver à sa réponse. Ils peuvent montrer des exemples, des figures sur lesquelles ils se sont appuyés, des souvenirs de travaux précédents. Ils pourront aussi donner leur opinion personnelle sur le travail réalisé pendant la séance.

L'enseignant pourra répéter des remarques faites pendant la séance comme celles associées à la position du produit, à son déplacement en fonction des facteurs. Il peut aussi remarquer le fait que « nous n'avons pas travaillé le produit de deux nombres négatifs puisque cela correspond à une représentation géométrique dont les justifications ne se trouvent pas dans les ensembles de nombres que nous travaillons pour l'instant. Par contre, il serait très intéressant de retenir l'idée que le produit est une transformation dans le plan (revenir aux exemples) puisque cela vous permettra dans le futur de reconnaître la multiplication associée à une rotation et même à d'autres transformations géométriques qu'on n'a pas encore étudié ».

7.1.1 Mise en place de la séance expérimentale en classe de Quatrième : le changement de certaines variables et quelques questions ouvertes

Comme nous l'avons déjà dit (cf. Section 5.1.2), le changement de certaines variables dans la structure et la mise en place des expérimentations en classe de Quatrième a changé l'essence de notre situation initiale, c'est-à-dire notre situation expérimentale en classe de Quatrième correspond finalement à une situation didactique où élèves et enseignant travaillent ensemble dans la construction du sens de la multiplication et non pas à une situation de réinvestissement du sens de la multiplication, comme celle mise en place en classe de Terminale S.

De ce fait, le déroulement effectif de notre séance en classe de Quatrième sera présentée d'une façon assez simplifiée par rapport aux analyses développées en classe de Terminale S, ceci étant donné qu'une première mise en place de notre séance expérimentale en classe de Quatrième nous a permis d'identifier le fait que les connaissances préalables des élèves ne remplissaient pas le même rôle qu'en classe de Terminale S. De ce fait, le raisonnement mathématique à développer au cours de la séance devait nécessairement se construire en collaboration avec l'enseignant au lieu de se manifester comme une réponse à une situation non traditionnelle d'apprentissage.

Nous allons donc présenter maintenant une description de l'expérimentation menée en classe de Quatrième à deux moments différents de cette étude. Premièrement, nous allons esquisser la première expérimentation mise en place, où la séance avait le même statut que celui que nous avions donné à la séance menée en classe de Terminale S. Ceci ne sera qu'une introduction pour mieux expliquer notre décision concernant le changement de certaines variables didactiques telles que l'intégration plus active d'une composante technologique pour les phases de bilan ainsi que la multiplication des interventions de l'enseignant tout au long de la séance.

7.1.2 Première intervention en classe de Quatrième : un regard naïf de la réalité scolaire

L'étude des programmes officiels nous a donné une vision théorique de la réalité scolaire, ce qui nous a permis de valider la pertinence de notre séquence d'apprentissage par rapport aux connaissances acquises par les élèves, connaissances qui leur permettraient de résoudre chacune des questions posées.

Néanmoins, cette validation n'était, comme nous l'avons déjà dit, que théorique. Une rencontre préalable à la mise en place de nos séances expérimentales avec les enseignantes collaboratrices, nous a permis d'une part, de modifier quelques codages dans la séquence (une amélioration du format de la fiche des élèves) et, d'autre part, de faire le point sur les connaissances réelles des élèves : ils n'avaient jamais vu le produit de deux fractions comme la réduction d'une aire et ils n'associaient pas le terme *facteur* à l'opération multiplication.

Les enseignantes ont montré une très bonne volonté non seulement à respecter mais aussi à s'approprier le contrat porté par cette séance expérimentale. Le rôle de l'enseignant en tant que guide de l'activité et non pas comme le porteur de la bonne réponse a bien été pris en compte. La peur de se retrouver avec une classe qui ne saurait pas du tout quoi faire avec une séquence pleine de questions si ouvertes a aussi été manifestée.

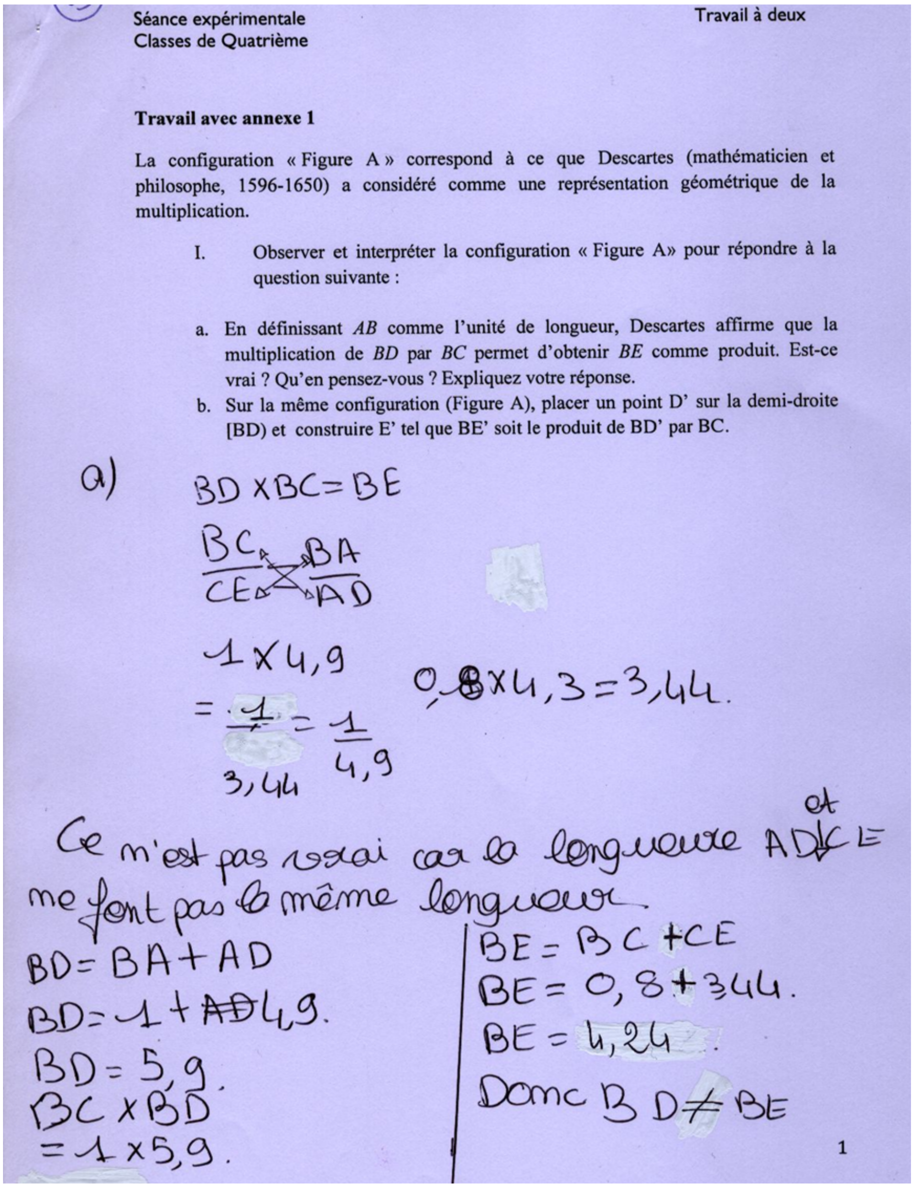
Compte tenu de ce qui précède, nous avons constaté l'importance de connaître empiriquement et par avance le contexte d'expérimentation du chercheur. L'analyse des programmes et l'étude de manuels ne doivent constituer qu'un *référent théorique* de la réalité scolaire.

La richesse de notre première intervention nous a permis de repérer certains éléments qui auraient dû être pris en compte dans la conception initiale de cette séquence. De ce fait, nous avons aussi trouvé des éléments nous permettant d'améliorer notre proposition. Par contre, compte tenu des objectifs initiaux de cette recherche, nous n'allons pas approfondir l'analyse des expérimentations menées en classe de Quatrième étant donné qu'elle ouvre une autre dimension de recherche impossible de développer comme il faut dans le cadre de cette thèse. Ainsi, notre proposition pour la classe de Quatrième se situe sur le point de départ d'une nouvelle recherche portant sur des éléments vérifiant une nouvelle conception de l'enseignement (cf. Section 3.6). Sur cet aspect, nous y reviendrons plus tard (cf. Section 9.4).

La mise en place de la séance

L'intérêt des élèves pour l'activité a été relatif, c'est-à-dire, certains ont été beaucoup plus motivés que d'autres. Néanmoins la plupart des élèves se sont mis dans la recherche de solutions au sein des discussions à l'intérieur de chaque groupe de travail.

Certaines consignes ont été difficiles à comprendre et la permanente utilisation de la règle graduée pour prouver le produit de Descartes les a amenés à des réponses du type : le produit de Descartes est faux. Ceci était une réponse complètement inattendue.



Séance expérimentale
Classes de Quatrième

Travail à deux

Travail avec annexe 1

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication.

I. Observer et interpréter la configuration « Figure A» pour répondre à la question suivante :

a. En définissant *AB* comme l'unité de longueur, Descartes affirme que la multiplication de *BD* par *BC* permet d'obtenir *BE* comme produit. Est-ce vrai ? Qu'en pensez-vous ? Expliquez votre réponse.

b. Sur la même configuration (Figure A), placer un point D' sur la demi-droite [BD) et construire E' tel que BE' soit le produit de BD' par BC.

a) BD × BC = BE

$\frac{BC}{CE} \quad \frac{BA}{AD}$

1 × 4,9 = $\frac{1}{3,44}$ = $\frac{1}{4,9}$

0,8 × 4,3 = 3,44.

Ce n'est pas vrai car la longueure AD et CE ne font pas la même longueur.

BD = BA + AD
BD = 1 + ~~AD~~ 4,9.
BD = 5,9.
BC × BD
= 1 × 5,9.

BE = BC + CE
BE = 0,8 + 3,44.
BE = 4,24.
Donc BD ≠ BE

1

Figure 7.4 – Groupe 2. Classe 2. Réponse à la première question.

En outre, très peu d'élèves sont effectivement arrivés à donner une réponse à la dernière question et la difficulté de mettre en relation les différentes questions travaillées pendant la séance les a empêchés de répondre en faisant référence à une interprétation géométrique du produit en fonction du travail réalisé.

La signification du produit de deux fractions comme l'aire réduite d'une unité n'a pas pu non plus être évoquée dans leurs réponses à la dernière question puisque cela ne faisait pas réellement partie de leurs connaissances préalables.

L'entrée classique à l'ETM, dite épistémologique, empêchait inconsciemment la recherche d'une interprétation de l'énoncé ne portant pas sur des méthodes déjà travaillées dans leur cahier de cours. Néanmoins, des méthodes très intéressantes et non prévues *a priori* ont été identifiées dans le travail de certains groupes, par exemple, la construction de la représentation géométrique de la multiplication d'un nombre positif par un nombre négatif a été justifiée en fonction d'une symétrie centrale.

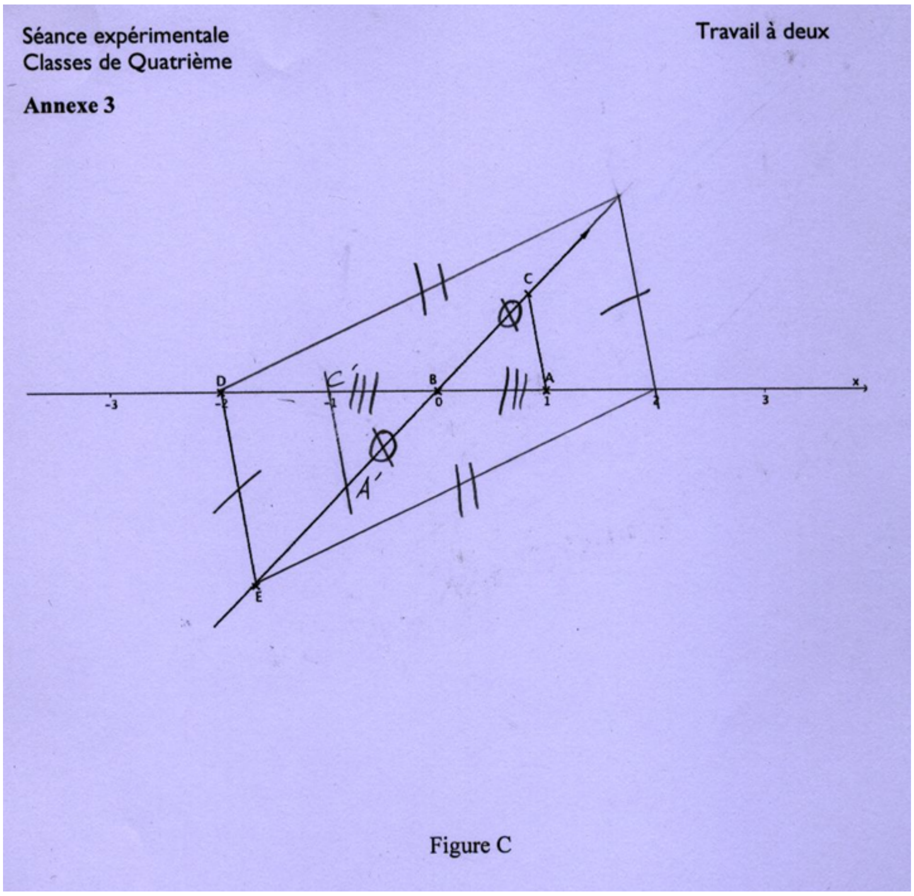


Figure 7.5 – Groupe 3. Classe 1. Réponse à la troisième question.

En outre, nous avons aussi trouvé des réponses associées à une possible visualisation du produit en termes de transformation : *agrandissement/réduction*, ceci rendant compte d'une possible compréhension du produit grâce à la *visualisation* favorisée par la mise en place d'une petite phase de bilan, où l'enseignante a réussi à montrer avec GeoGebra la configuration du produit et le changement de position du facteur BD.

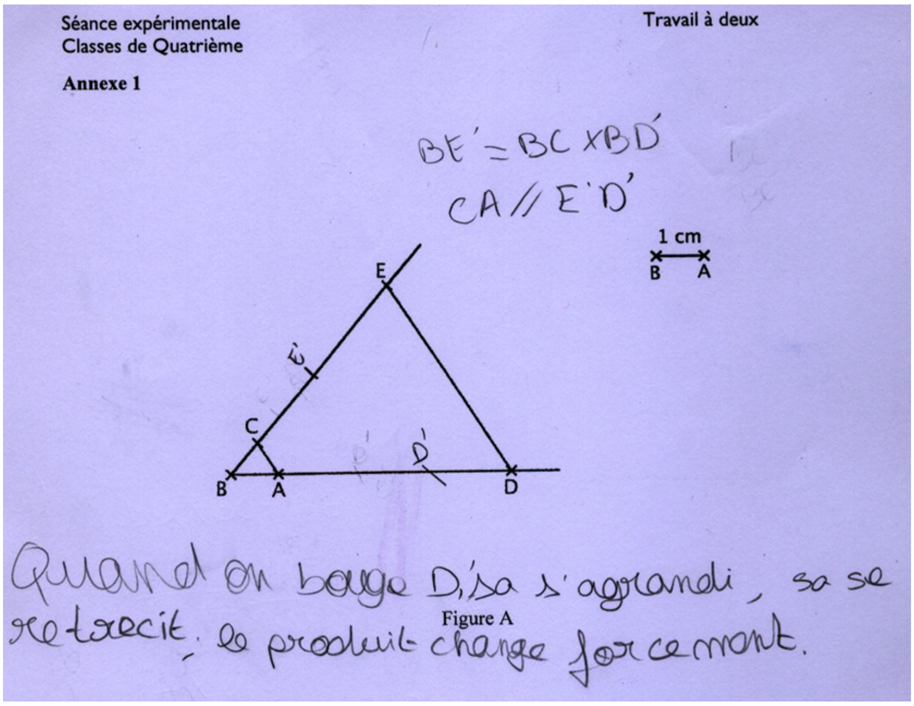


Figure 7.6 – Groupe 2. Classe 2. Réponse à la question 1.b.

Néanmoins, le travail réalisé en groupes n'a pas pu être partagé à toute la classe étant donné qu'il n'y a pas eu le temps de mettre en place une phase de bilan. Les connaissances mobilisées par les élèves n'ont pas pu non plus être validées par les enseignantes.

La consigne donnée aux enseignantes de laisser avancer les groupes et de ne faire que des petites interventions en cas de blocage a empêché la prise en charge de la situation. Étant donné que les groupes n'avançaient pas au même rythme, les interventions de l'enseignante allaient nécessairement donner/avancer des réponses à certains d'entre eux. Néanmoins, les deux enseignantes ont bien essayé de mettre en place au moins une des phases de bilan qui étaient envisagées. L'échec de l'outil informatique dans une de ces classes n'a pas facilité la tâche de l'enseignante et le bilan n'a pas pu être réalisé. Dans l'autre classe, le bilan a permis aux élèves d'observer la manipulation du logiciel et le changement du produit provoqué par le changement de la nature d'un des facteurs. Par contre, il n'y a pas eu le temps de produire des formulations orales de la part des élèves de sorte qu'ils puissent partager/développer/enrichir leurs réponses.

Finalement les élèves rendent leurs séquences et la séance termine.

7.1.3 Deuxième intervention en classe de Quatrième : des nouvelles consignes, l'autonomie de l'enseignant, la prise en compte du changement de variables

Suite aux résultats obtenus grâce à notre première intervention en classe de Quatrième, deux changement sont devenus indispensables avant une prochaine mise en place des expérimentations : d'une part, le rôle de l'enseignant devrait être plus actif et, d'autre part, l'utilisation du logiciel de géométrie n'est plus optionnel mais nécessaire pour faire avancer la recherche et motiver des réflexions de la part des élèves.

La date des prochaines interventions était déjà fixée. Chercheuse et enseignante relisent le document portant sur le déroulement de la séance en soulignant les aspects qu'il ne fallait surtout pas négliger. L'enseignante pose encore quelques questions. Cette idée de représenter géométriquement le produit d'un entier positif par un entier négatif c'est du jamais vu. L'enseignante regrette l'absence des valeurs algébriques dans l'enseignement car dans la situation actuelle le langage à utiliser dans la troisième question ne peut pas être formel. Néanmoins, elle est motivée et elle a aussi motivé ses élèves. Avant la mise en place de la séance expérimentale les élèves ont fait une recherche sur Descartes : qui était ce personnage historique ? Ils ont présenté leur travail et ils l'ont commenté avec toute la classe. Une semaine avant l'expérimentation, l'enseignante a aussi retravaillé avec eux la signification des termes *facteur* et *produit*. Les élèves attendaient cette *séance spéciale sur la multiplication de Descartes* avec enthousiasme.

La mise en place de la séance : classe A

L'enseignante range les tables avant l'arrivée des élèves de sorte qu'ils s'installent directement par groupes.

Une fois que tous les élèves se sont installés, l'enseignant introduit l'activité et chaque groupe commence la recherche tout de suite. L'enseignante tournait dans la salle en regardant le travail de chaque groupe. Sa première intervention devant toute la classe s'est produite après neuf minutes de recherche pour insister sur le fait qu'il était permis de faire des hypothèses et des conjectures pour avancer dans la recherche des réponses aux questions posées. Neuf minutes plus tard, la plupart des élèves avaient déjà résolu la première question. L'enseignant leur demande quelle a été la connaissance mathématique mise en place pour répondre à cette question. Le théorème de Thalès a été la seule réponse donnée à voix haute par plusieurs élèves.

Avant de laisser les groupes avancer dans leur recherche l'enseignant décide de laisser une trace écrite pour rappeler ce qu'est le produit, les facteurs ainsi que la relation entre eux.

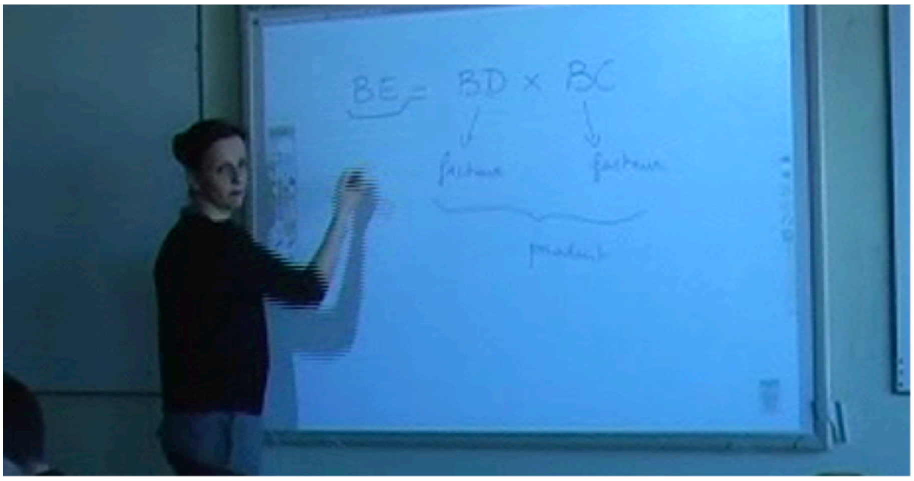


Figure 7.7 – L'enseignante rappelle les composantes d'une multiplication

Par la suite, elle conduit la séance pour que tous ensemble construisent le point d'entrée à la réponse à la question *1.b.* Les élèves donnent la consigne et l'enseignante l'écrit au tableau.

La première intervention avec GeoGebra a lieu une fois que la plupart des groupes ont déjà résolu ou sont en train de répondre à la question *2*.

L'enseignant montre la première configuration correspondante à celle donnée dans les fiches des élèves dans l'annexe 1 de la séquence. Elle souligne la relation entre facteurs et produit en écrivant au tableau, premièrement, l'égalité donnée (produit de Descartes) et, deuxièmement et avec l'aide des élèves, la deuxième égalité correspondante au produit qu'il fallait construire dans la question *1.b.* Elle donne encore du temps pour la recherche.

Quinze minutes plus tard, l'enseignante demande quel est le placement des nouveaux produits qu'ils ont construit. Ensuite, elle demande aux élèves d'observer la configuration projetée au tableau ainsi que le déplacement du point D (ou la variation du facteur BD) pour déterminer ce qui se passe avec le produit BE. Ils observent bien que le produit rétrécit et

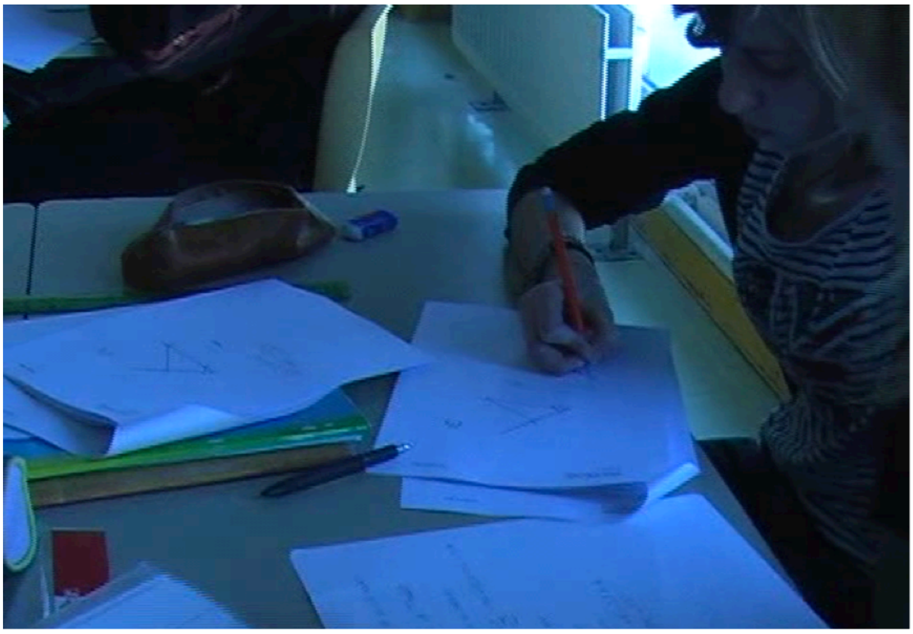


Figure 7.8 – Groupe enregistré dans la classe A de la deuxième expérimentation en Quatrième

c'est bien cela qu'ils formulent à l'oral. L'enseignante demande ensuite de ne pas effacer les réponses qu'ils ont déjà rédigées dans leurs feuilles et de passer tout de suite à la question trois de la séquence.

Même après la consigne donnée précédemment par l'enseignante, certains groupes sont restés dans la deuxième question. Le fait que toute la classe travaillait dans la recherche des réponses a bien permis à l'enseignante de faire attention au travail de chaque groupe. De ce fait, elle a pu inviter un élève au tableau pour manipuler directement le logiciel de sorte qu'il puisse donner une réponse à la deuxième question et avancer dans sa recherche. La manipulation du logiciel a été faite en suivant les indications de l'enseignante : déplacer le point D puis déterminer ce qui se passe avec les droites DE et AC. Une fois qu'il a déterminé que les droites restent parallèles elle lui a demandé d'indiquer la position du produit puis d'aller le construire sachant que l'élément clé permettant de justifier le produit dans la deuxième question était le parallélisme de droites.

Première phase de bilan :

Quelques minutes plus tard, l'enseignante reprend au tableau la configuration correspondante à l'annexe 2 de la séquence. Elle retravaille la relation entre facteurs et produit. Elle essaie d'attirer l'attention des élèves sur l'effet provoqué dans le produit quand la valeur d'un facteur change : « *BC reste fixe, BD varie et on les multiplie*. Elle souligne le fait qu'*il se produit une opération quand on multiplie* et que leur but est de trouver le placement du produit BE quand cette opération se produit ».

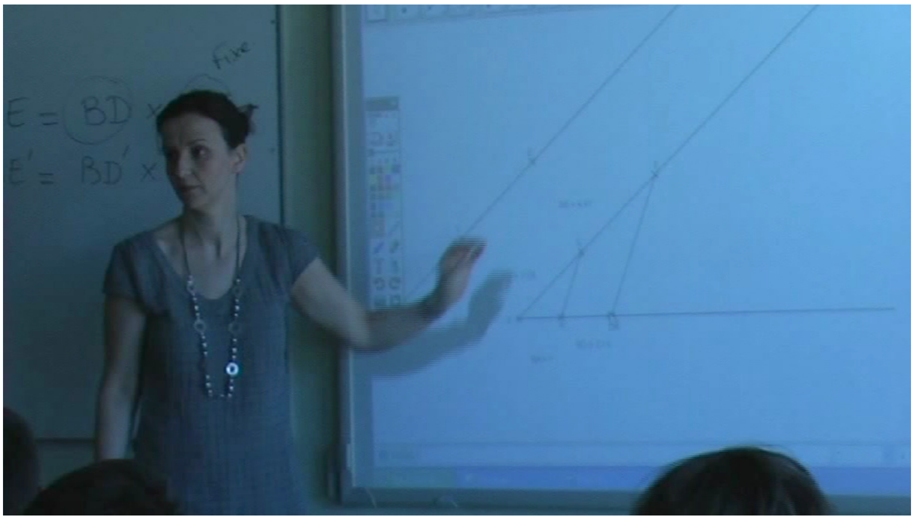


Figure 7.9 – Premier bilan

L'enseignante change la position du facteur BD jusqu'à ce qu'il soit confondu avec l'unité. Elle demande aux élèves de formuler oralement ce qui se passe. Les élèves s'expriment par rapport au fait que les deux droites parallèles se sont confondues. L'enseignante leur questionne ensuite par rapport à ce qui se passe avec le produit. Ils observent que « *le produit BE est égal à BC et que le grand et le petit triangle se sont confondus aussi* ».

Par la suite, l'enseignante change la nature du facteur BD, il devient une fraction entre 0 et 1. La question se pose à nouveau : qu'est-ce qui se passe avec le produit quand le facteur BD devient inférieur à 1 ? Où est-il placé ? Des réponses diverses émergent des élèves mais l'enseignante reprend la réponse suivante : *quand BD est inférieur à BA, BE est inférieur à BC*.

Dans la transcription ci-dessous, nous allons observer le déroulement de la première phase de bilan. Les interventions de l'enseignante ont été codées par la lettre « P ». Des omissions, des mots et de phrases non audibles ont été codées par [...]. Nous allons observer comment l'enseignante a guidé le travail des élèves jusqu'à ce qu'ils sont arrivés à *formuler* l'opération produite par le facteur *BD* sur le facteur *BC* comme un *déplacement*, i.e. le produit se déplace en fonction de la nature du facteur *BD*.

1. P : quand BD est inférieur à BA, BE est inférieur à BC [...]. On a l'impression qu'y a une sorte de, de quoi là [...]

2. P : Comment évolue BE par rapport à BD ?
3. A : Bah […] en par.. non, bah avec le théorème
4. C : En diminuant
5. P : En diminuant ? Quelle est… Donnez moi, donnez moi, par rapport au facteur BD donnez-moi le comportement de BE
6. E : Proportionnellement
7. A : Bah BE il est tout le temps accroché à…
8. P : il est accroché ?
9. A : il est toujours accroché au droite en fait […]
10. P : il est toujours accroché à la droite si tu veux […] Tu as dis qq chose d'intéressant vas-y dis moi.

L'enseignante essaie de faire *répéter* cette dernière formulation à l'élève ainsi que de le faire approfondir l'analyse du produit. En ce moment, nous observons empiriquement la complexité de la tâche demandée et la difficulté des élèves pour interpréter l'*opération* résultant de l'action du facteur BD.

Le dialogue produit entre l'enseignante (P) et l'élève (A) ne va pas très loin. Néanmoins, l'intervention d'un autre élève (D) en faisant référence au théorème de Thalès et au parallélisme de droites fait converger la discussion, premièrement, vers la justification théorique de la position du produit (Théorème de Thalès) et, deuxièmement, vers le constat de l'existence d'une *évolution du produit en fonction de la nature du facteur* BD.

1. P : […] Alors, BE est un produit. Je répète, BD et BC sont des facteurs, BC est fixé on fait varier BD et comment évolue BE ? Vous avez vu que quand on multiplie BD par BC, si D est plus petit que 1, BE est plus petit que…
2. Classe : que BC.
3. P : que BC, d'accord ? Maintenant je vais faire dans l'autre sens. (Elle reprend le logiciel et elle fait varier le facteur BD dans l'autre sens i.e. il revient supérieur à l'unité). Faites-moi une phrase analogue s'il vous plaît. Lors que… […] Regardez je vais faire bouger… Est-ce que qq'un peut me faire une phrase me traduisant cette chose que je suis en train de faire avec la souris ?
4. F : un déplacement

5. P : là je l'ai entendu Thomas. Un déplacement. J'ai fait un déplacement […] Vas-y développe, j'ai fait un déplacement, comment je me déplace ? Vas-y Thomas… Comment je me déplace… […]. Dans cet exemple, dans cet exemple, est-ce que quelqu'un peut me faire une phrase par rapport à la représentation du produit BE en fonction de BD. Alors, Henry avait levé la main
6. G : quand on déplace E il sera toujours, soit devant soit derrière C.
7. P : voila, le déplacement, il est soit, alors on va dire derrière et devant pour essayer de bien reprendre ses termes, soit BE est devant C donc avant
8. G : plus petit que BC
9. P : plus petit, très bien, soit…
10. G : sinon il est plus grand
11. P : Quand est-ce que BE est plus petit que BC ?
12. G : Quand D est plus petit aussi que A.
13. P : Quand le facteur BD est plus petit que le facteur BA, il y a une correspondance […] il y a que BE est plus petit que BC. Et dans l'autre sens ?
14. G : donc quand C est plus grand que A…
15. P : C ce n'est pas le point qu'on déplace…
16. G : quand D est plus grand que A
17. P : quand BD est plus grand que BA…
18. G : donc quand BD est plus grand que BA, donc BE est plus grand que BC.
19. P : voila très bien, on va tous passer à la question 3.

L'enseignante leur fait observer dans leur séquence la configuration donné dans l'annexe 3. Maintenant toute la classe travaille dans la troisième question.

Deuxième et dernière phase de bilan :

Après 10 minutes de recherche, l'enseignante projet au tableau la configuration correspondante à celle donnée dans l'annexe 3. Elle décrit les composantes de cette configuration projetée, laquelle tout au début ressemble aux deux configurations précédentes. Elle remarque une différence : les lignes constituant la configuration ne sont plus de demi-droites mais des droites et aussi que les centimètres ne correspondent plus à l'unité. Un élève remarque que les facteurs sont maintenant positifs et négatifs et l'enseignante rappelle donc la composition

Figure 7.10 – Deuxième bilan

d'une droite graduée. Elle fait toutes ses remarques en posant des questions aux élèves. Les réponses ont été construites en collaboration entre l'enseignante et les élèves.

Par la suite, l'enseignante formule ce qu'elle va faire avec le logiciel pour qu'on puisse visualiser au tableau la même configuration que les élèves ont dans l'annexe trois :

1. P : Je vais faire bouger le point D, donc là vous savez exactement comment le facteur BD fait varier le facteur BE, [...] d'accord, agit, c'est-à-dire comment il agit le facteur BD sur le facteur BE. Vous l'avez à peu près vu, je pense que dans vos têtes c'est à peu près clair. Sur le dessin vous avez une parallèle ici, je crois que c'est en moins deux ? Pour quoi, alors, là vous ne l'avez pas encore appris, mais il y a certains qui l'ont très bien fait, ils ont vu que c'était du Thalès.

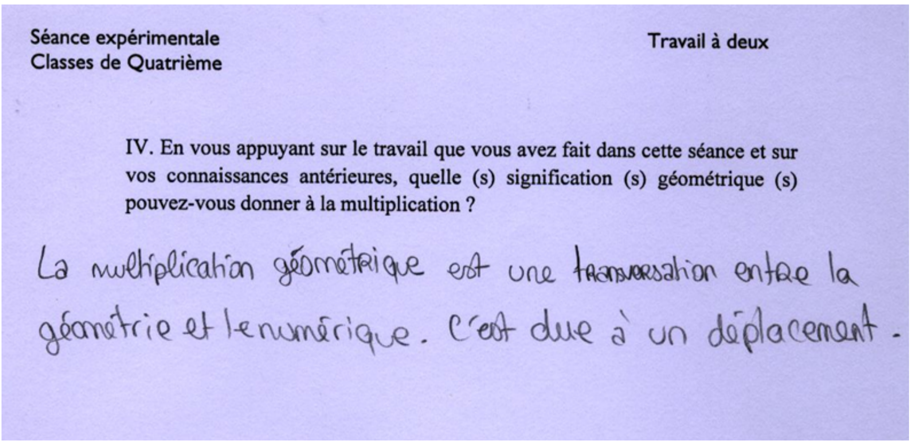
Elle reprend ainsi des réponses que les élèves ont déjà données, par exemple, certains ont justifié le produit par le théorème de Thalès, d'autres par symétrie (tel que nous l'avons aussi trouvé lors de la première expérimentation) et le fait que d'autres ont aussi mesuré. Elle reprend cette dernière réponse et pose la question : *pourquoi ceux qui ont mesuré ont eu des problèmes ?*

L'enseignante demande aussi, avant de faire bouger le point D, ce que ce point devient quand on change son placement. En faisant le déplacement du point D elle reprend à l'aide des élèves tout ce qu'ils avait déjà fait dans les bilans précédents, surtout le fait que le produit rétrécit quand le facteur BD est inférieur à l'unité. Une fois que le facteur BD a pris une valeur négative, elle s'adresse aux élèves et leur demande ce qui se passe avec le point E. Ils observent et formulent qu'*il passe du positif au négatif*. Certains élèves formulent la règle de signes pour justifier le produit obtenu.

L'enseignante reprend cette formulation en faisant un lien avec la configuration donnée au tableau. Elle remarque que cette fois on n'a pas travaillé la multiplication numérique. De cette façon elle introduit la quatrième et dernière question de la séquence. Un élève passe au tableau et l'enseignante les invite à reprendre des expressions qu'ils avait déjà formulées. Ils reprennent le mot *déplacement* que l'enseignante interprète comme une *transformation*.

Finalement elle invite les élèves écrire une réponse à la dernière question de la séquence en prenant en compte tout le travail réalisé pendant la séance.

Voici quelques réponses des élèves à la dernière question de la séquence :



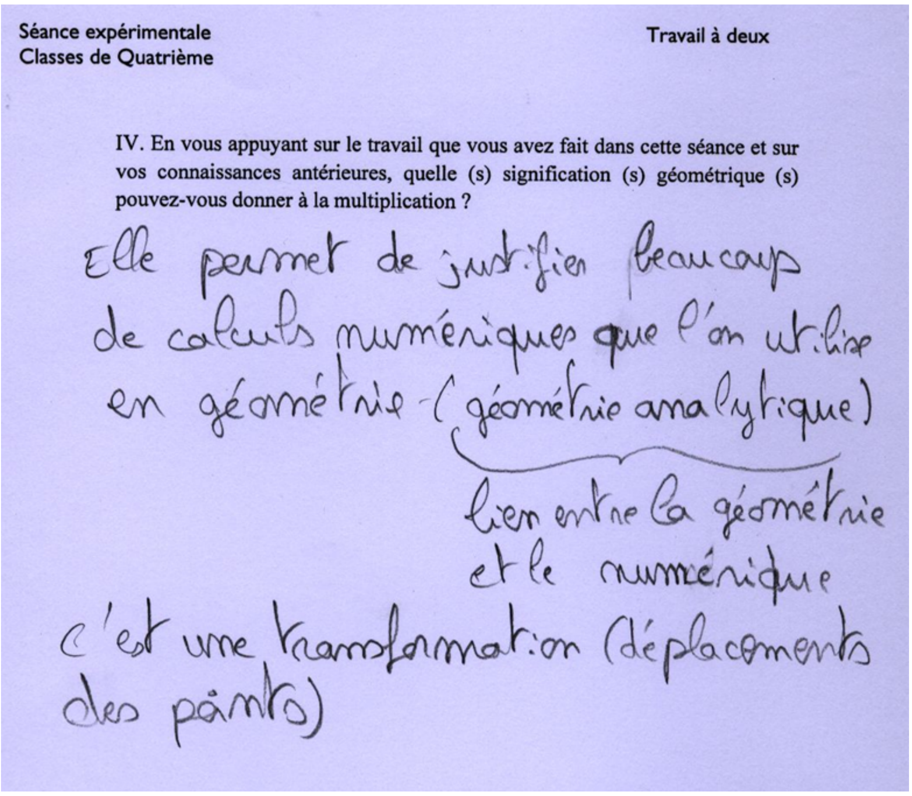
Séance expérimentale
Classes de Quatrième

Travail à deux

IV. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle (s) signification (s) géométrique (s) pouvez-vous donner à la multiplication ?

La multiplication géométrique est une transversation entre la géométrie et le numérique. C'est due à un déplacement.

Figure 7.11 – Réponse à la dernière question. Groupe 1.



Séance expérimentale
Classes de Quatrième

Travail à deux

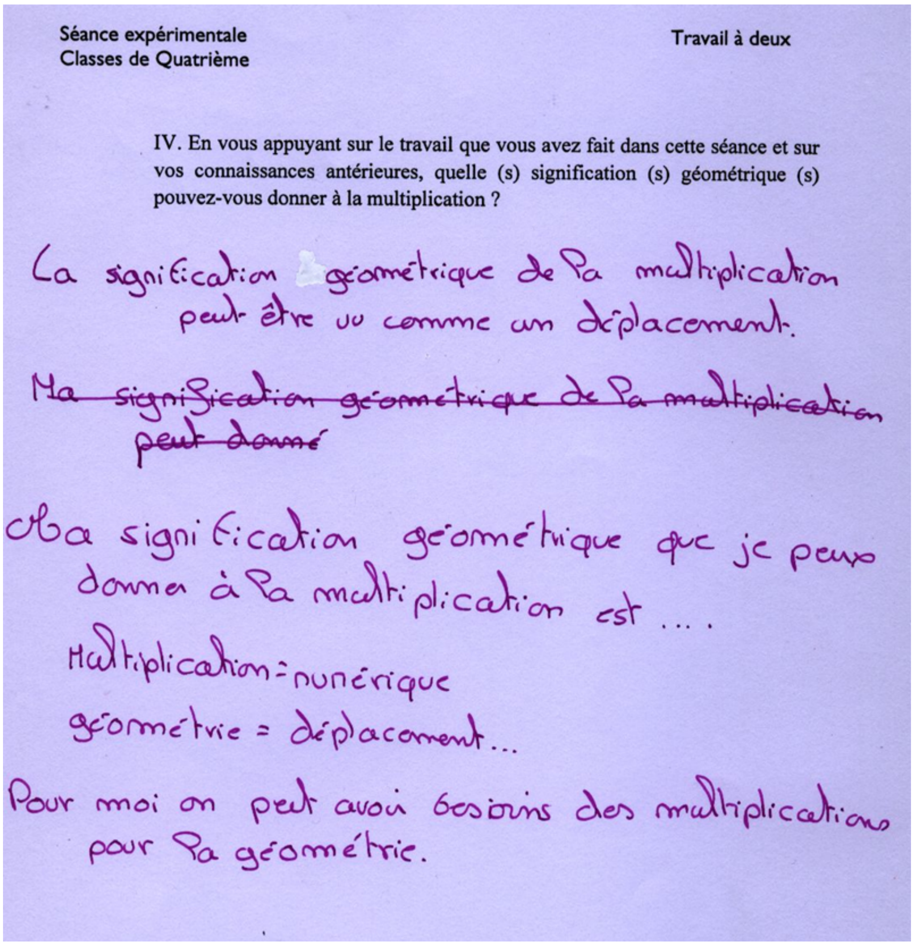
IV. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle (s) signification (s) géométrique (s) pouvez-vous donner à la multiplication ?

Elle permet de justifier beaucoup de calculs numériques que l'on utilise en géométrie - (géométrie analytique)

lien entre la géométrie et le numérique

c'est une transformation (déplacements des points)

Figure 7.12 – Réponse à la dernière question. Groupe 2.



Séance expérimentale
Classes de Quatrième

Travail à deux

IV. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle (s) signification (s) géométrique (s) pouvez-vous donner à la multiplication ?

La signification géométrique de la multiplication peut être vu comme un déplacement.

~~Ma signification géométrique de la multiplication peut donné~~

Ma signification géométrique que je peux donner à la multiplication est ....

Multiplication = numérique

géométrie = déplacement...

Pour moi on peut avoir besoins des multiplications pour la géométrie.

Figure 7.13 – Réponse à la dernière question. Groupe 3.

7.1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le changement de variables et l'évolution que nous avons produit dans *l'essence* de la situation initiale proposée pour des classes de Quatrième. Nous avons aussi rendu compte de l'effet de ces changement, nous conduisant à la conception d'une nouvelle situation qui sortait de ce qui était prévu tout au début de cette recherche : concrètement, nous sommes passés d'une situation visant le réinvestissement de la multiplication à une situation de construction du sens de cette opération mathématique au milieu d'un travail collaboratif entre élèves et enseignant.

Dans cette nouvelle situation et grâce au rôle plus actif de l'enseignante tout au long de la séance, nous avons :

– Identifié les difficultés des élèves par rapport à la compréhension des énoncés ;
– déterminé le besoin des élèves d'entendre une autre formulation de la question et/ou la validation de leurs idées par l'enseignante ;
– constaté la difficulté particulière provoquée par le changement de cadre dans la troisième question, où l'unité n'est plus exprimée en centimètres. L'unité était devenue abstraite et la possibilité de la *visualiser* géométriquement avait besoin d'une intervention de l'enseignante pour faciliter le repérage des élèves de cette unité dans la droite graduée ;
– verifié le contrôle du temps didactique grâce aux phases de bilan ainsi que le travail effectif des élèves jusqu'à la fin de la séance.
– déterminé le fait que la diversité des espaces de travail mathématiques personnels appropriés par les élèves trouve une organisation commune grâce aux interventions de l'enseignante et aux échanges entre elle et les élèves.

Compte tenu de ce qui précède, le changement de variables portant principalement sur le rôle de l'enseignant tout au long de la séance nous a conduit à des réflexions très profondes qui nous permettent de connecter certaines des caractéristiques de la réalité du système d'enseignement français avec un processus d'apprentissage centré dans la médiation et la collaboration :

– Premièrement, nous avons pu constater un élément essentiel de la réalité du système scolaire français où l'élève attend fortement des indications de l'enseignant pour répondre à la tâche demandé ;
– deuxièmement, nous nous sommes aperçus du fait que cette dépendance n'est pas déterminante de l'action de l'élève puisqu'il est aussi capable de *chercher* et de trouver des

réponses qui sortent du cadre et du contrat préétablis (par exemple, même dans la première expérimentation en classe de Quatrième, certains élèves ont trouvé de réponses pour expliquer le produit de deux nombres relatifs (cf. Figure 7.5) ;

– troisièmement, ces dépendance-indépendance peuvent coexister au milieu d'une situation où le rôle de l'enseignant et les responsabilités de l'élève se déterminent grâce à une vision *participative* (Sfard, 2008) de l'apprentissage.

Compte tenu de ce qui précède, la mise en place de nos séances expérimentales en classe de Quatrième ne nous a pas conduit à la recherche de parcours d'action des élèves à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique. La mise en place de ces situations nous a situé sur le point de départ d'une autre recherche portant sur une autre conception de l'enseignement (cf. Section 3.6), que nous ne pourrons pas développer dans le cadre de cette thèse.

Ainsi, la nouvelle situation proposée en classe de Quatrième nous a permis de faire quelques constats qui seront étudiés dans la continuation de cette recherche et qui portent principalement sur l'importance de la *médiation* et de l'*orchestration de l'enseignant* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) à l'intérieur de l'*Espace de Travail Mathématique de la classe*, lequel résulte de la mise en œuvre et de l'intégration d'une diversité d'espaces de travail mathématique personnels.

Finalement, nous nous questionnons sur comment intégrer à l'ETM le rôle de l'enseignant et sa médiation culturelle de sorte qu'elle ne soit pas seulement active dans la pratique mais aussi bien déterminée et reconnue dans l'étude des Espaces de Travail Mathématique, notamment dans les cas où ils s'intègrent à un processus socioconstructiviste de l'apprentissage(Bloch, 1999).

Chapitre 8

Les séances expérimentales en classe de Terminale S

8.1 Déroulement de la séance en classe de Terminale S : procédures de résolution, entrée dans l'ETM, commentaires et interventions de l'enseignant

Le déroulement de la séance en classe de Terminale S a plusieurs points communs avec le déroulement déjà décrit en classe de Quatrième. De ce fait, nous ne reprendrons pas dans cette section tous les éléments communs aux deux séances. Pour compléter la lecture de cette section il sera donc nécessaire, à certains moments, de revenir aux commentaires, procédures de résolution, interventions de l'enseignant déjà donnés dans la section précédente (cf. Section 6.3.2).

PREMIERE QUESTION

Travail avec l'annexe 1

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication. Nous vous présentons aussi son texte historique la décrivant.

I. Lire le texte de Descartes, puis observer la configuration « Figure A » pour répondre à la question suivante :

a. Nous proposons $AB = 1cm$. BE, est-il bien le produit annoncé par Descartes ? Qu'en pensez-vous ?

Annexe 1

Soit par exemple AB l'unité et qu'il faille multiplier BD par BC ; je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer la parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).

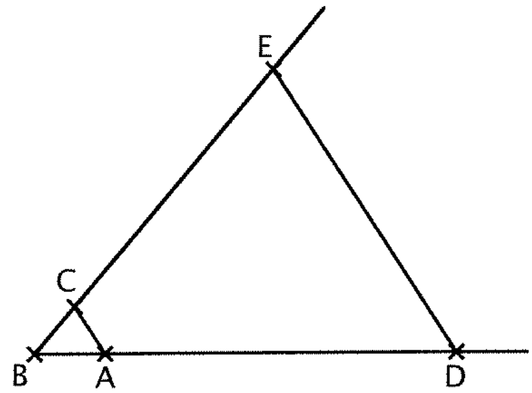


Figure 8.1 –

Introduction de l'enseignant (suggestion)

Voir introduction présentée dans la section précédente (cf. Section 7.1).

Procédures de résolution, entrée dans l'ETM et commentaires

L'énoncé constitué d'un texte historique et d'une représentation géométrique nous amène tout de suite à la recherche d'une mise en relation entre les deux. La réponse à la première question implique donc un processus complexe qui ne correspond pas seulement à un changement de registre de représentation (Duval, 2006b). L'observation de la configuration géométrique représentant le produit ne correspond pas au produit *aire* auquel nous pourrions être plus habitués. L'énoncé demande explicitement la mise en relation des deux composantes – le texte de Descartes et la représentation géométrique de sa multiplication – afin de montrer la vérité de l'assertion donnée par Descartes. Le passage du texte de Descartes à l'interprétation de la représentation géométrique de sa multiplication n'étant pas naturel, cette mise en relation n'est pas immédiate non plus. La figure doit être étudiée pas à pas en suivant le texte écrit par Descartes. Les segments constituant la représentation géométrique se trouvent aussi représentés algébriquement à l'intérieur d'un discours en langue naturelle, par contre, l'objet mathématique les mettant en relation, c'est-à-dire la multiplication, n'est nulle part explicitement représentée. Nous dirions que cet objet mathématique a été réinterprété dans un autre cadre mathématique.

Ce changement de cadre, que nous venons de mentionner, peut aussi être vu comme un processus cognitif de changement de registre de représentation. La représentation géométrique de la multiplication de Descartes rend explicites des propriétés de la multiplication que nous ne pourrions pas identifier en restant dans le registre de la langue naturelle, ni même en restant dans un registre numérique ou algébrique. D'ailleurs, le changement de registre va encore au-delà puisque les propriétés que nous pouvons identifier grâce à la représentation géométrique de la multiplication de Descartes seront reconnues et même visualisées une fois qu'une genèse figurale aura eu sa place dans ce processus : l'observation de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes doit, tout d'abord, faire appel à la proportionnalité sous-jacente au théorème de Thalès. La multiplication de Descartes ne sera vérifiée que quand le théorème de Thalès aura été visualisé. La mise en relation des deux plans de l'Espace de Travail Mathématique se fait à travers une sorte d'aller-retour qui permet de dégager la réponse attendue en produisant des interactions entre les connaissances mathématiques mobilisées (Robert, 2008) et les processus cognitifs en action.

De ce fait, les procédures de résolution attendues pour cette question visent une entrée épistémologique dans l'Espace de Travail Mathématique. Le paradigme géométrique organisant l'ETM n'est pas unique, et les réponses des élèves peuvent intégrer les aspects suivants : d'une part, des références à la proportionnalité existante entre les segments constituant la configuration puisque la représentation géométrique suggère une démonstration utilisant le théorème de Thalès (GII et genèse discursive et figurale en action). D'autre part, la reconnaissance du théorème de Thalès grâce à l'identification d'un de ses icônes représentatifs peut aussi être mise en place à travers des vérifications concrètes en mesurant directement sur la figure (GI), pour ensuite multiplier les mesures dans un registre numérique, et rapporter le produit et conclure avec un argument lié à l'approximation des mesures.

Nous précisons qu'il n'y a rien à rejeter de ce que les élèves pourraient faire pour justifier la validité de la représentation géométrique du produit de Descartes.

Interventions de l'enseignant en cas de blocage

Voir interventions présentées dans la section précédente (cf. Section 7.1).

DEUXIEME QUESTION

Travail avec l'annexe 2

II. Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

a. Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :

- sachant que $BA = 1cm$ placer D entre B et A ;
- construire E pour que BE donne le produit de la multiplication de BD par BC.

b. Décrire votre construction et expliquer pour quoi elle peut être considérée comme analogue à la multiplication de Descartes.

Annexe 2

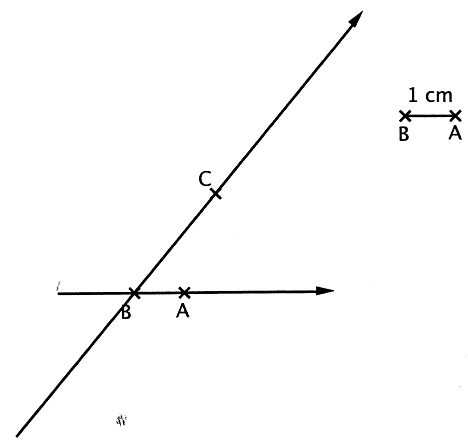


Figure 8.2 –

Procédures de résolution, entrée dans l'ETM et commentaires

Voir les procédures déjà présentées dans la section précédente (cf. Section 7.1).

Finalement, nous présentons la totalité des réponses que nous envisageons pour cette question, à travers les éléments suivants, qui peuvent se présenter séparément ou intégrés dans une seule réponse :

- Construction de Descartes et théorème de Thalès ;
- Référence à la position du produit en fonction de la position des facteurs ;
- Référence à la valeur et à la position du produit en fonction de la position des facteurs ;
- Référence aux réductions ou agrandissements d'un facteur en fonction de l'autre ;
- Construction de Descartes ;
- Théorème de Thalès ;
- Relation d'homothétie entre BD, BA, BE et BC ;
- Théorème de Thalès, mesures de segments puis théorème de Thalès sur la figure ;
- Pas de réponse.

Interventions de l'enseignant en cas de blocage

Voir interventions présentées dans la section précédente (cf. Section 7.1).

TROISIEME QUESTION

Travail avec l'annexe 3

III. Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point A d'abscisse $+1$ et du côté négatif le point D d'abscisse -2.

a. Projeter orthogonalement les points C et E sur l'axe des abscisses. Pouvez-vous justifier que l'abscisse du point E est le produit des abscisses des points D et C ? Comment ?

b. Si de manière plus générale, l'abscisse du point C est $x_C > 0$ et l'abscisse du point D est $x_D < 0$, décrire la représentation géométrique du point E sur (BC) d'abscisse $x_E = x_C x_D$.

Annexe 3

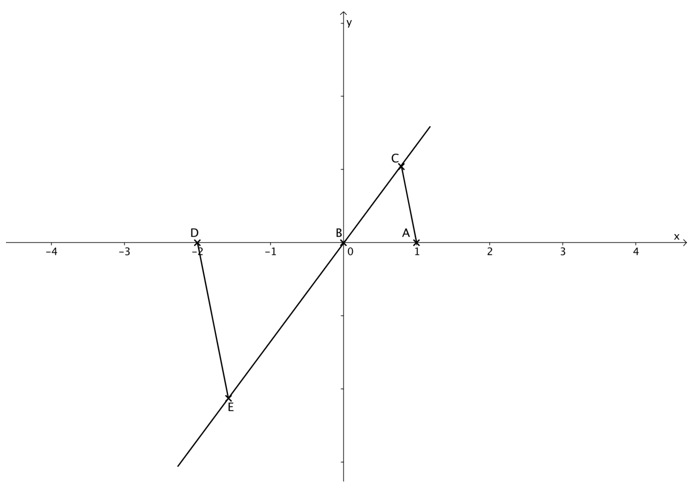


Figure 8.3 –

Procédures de résolution, entrée dans l'ETM et commentaires

Ce moment de la séance porte sur l'analyse d'une construction géométrique située sur la droite numérique. Pouvoir répondre aux questions de ce troisième moment est directement lié aux moments précédents quant à la justification du produit.

Dans cette nouvelle configuration géométrique, nous pouvons observer qu'il y a une relation étroite entre ses codages et ceux des configurations précédentes. Par contre, l'unité n'est plus exprimée en centimètres et de plus un des facteurs est explicitement qualifié de nombre négatif. C'est précisément à ce moment que la tâche devient plus complexe pour les élèves qui étaient restés dans la mesure.

La construction de la projection orthogonale des points vise l'identification d'une nouvelle configuration de Thalès permettant de justifier le produit en termes d'abscisses. Jusqu'à ce moment de la séance, les élèves n'ont pas la possibilité d'accéder aux vecteurs donc les possibilités de réponses sont réduites et les justifications possibles sont limitées aux notions mathématiques disponibles dans l'énoncé. Leur recherche devrait donc se concentrer sur le théorème de Thalès et ils pourraient exprimer leurs réponses en prenant en compte des valeurs algébriques. D'ailleurs, il faut tenir compte du fait que si les élèves ne considèrent pas les valeurs algébriques mais des valeurs absolues, la position du produit sera dépendante des choix des orientations des facteurs dans la représentation géométrique donnée. Dans ce cas, la justification du produit devrait inclure une référence à la règle de signes.

Voici les relations qui justifient le produit en termes d'abscisses :

Thalès dans la première configuration :

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{AB}$$
$$BE = BD \times BC$$

Thalès dans la deuxième configuration :

$$\frac{BE}{BC} = \frac{x_E}{x_C}$$

Ou

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{x_E}{x_C}$$

D'après la première égalité on a

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{AB}$$
$$BE = BD \times BC$$

On remplace dans l'égalité correspondante à la deuxième configuration,

$$BD = \frac{x_E}{x_C}$$

Ou

$$BD = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$$

On conclut,

$$x_E = \pm x_D \times x_C$$

Ou

$$x_E = x_D \times x_C$$

Par ailleurs, dans la description de la représentation géométrique du produit, nous nous attendons à une référence à la position du produit déjà évoquée dans la question précédente. Le déplacement du produit dont nous avons parlé dans la question précédente sera toujours présent mais il sera déterminé par l'existence d'un facteur négatif, qui entraînera que le produit BE sera placé *de l'autre côté* du point B par rapport au point C, de sorte que les points sur la droite seront toujours alignés mais dans l'ordre E, B, C. Cette observation, déjà faite dans la question précédente sera un élément clé pour les élèves au moment de décrire la représentation géométrique du représentant du produit E d'abscisse $x_C x_D$. Ainsi, que signifie la position du produit dans la représentation géométrique de la multiplication ? Et dans le cas spécifique où un des facteurs est négatif? On revient à ce qu'on a dit dans la question précédente : « la position du produit est le résultat d'une opération mathématique, c'est-à-dire qu'elle est le résultat d'une action : nous pourrions dire qu'un facteur a agit, ou opère, sur un facteur *b*. Ce facteur a, que fait-il sur le facteur *b* ? »

Par rapport à l'analyse concernant l'entrée dans l'Espace de Travail de Mathématique, voir la description donnée dans la section précédente, question 3 (cf. Section 7.1).

Pour finir cette analyse, nous donnons d'une façon simplifiée tous les éléments de réponse possibles à la question *3.a* et *3.b* dans les listes suivantes :

Question 3a :

– Double théorème de Thalès, comme prévu et développé en tant que réponse attendue ;
– Théorème de Thalès en fonction des abscisses ;
– Expression de relations d'homothétie et d'agrandissement des triangles d'après l'analyse de la représentation géométrique donnée ;
– Théorème de Thalès en fonction des abscisses et construction du triangle ABC par symétrie centrale sur la figure donnée ;
– Expression non affine du théorème de Thalès sans prendre en compte les abscisses ;
– Pas de réponse.

Question 3.b :

– Règles de signes en termes d'abscisses.
– Référence à la variation de la position du produit en fonction de la position ou de la valeur des facteurs ;
– Règles de signes et référence à la valeur négative du produit ;
– Règles de signes et représentation de la configuration géométrique du papillon du théorème de Thalès pour l'expliquer ;
– Expression de la règle des signes en langue naturelle ;
– Référence à la variation de la position sur la droite (BC) du produit ;
– Expression du produit comme une homothétie de rapport BD ;
– Pas de réponse.

Interventions de l'enseignant en cas de blocage

La médiation de l'enseignant, même si elle n'a été considérée que partiellement, est toujours un élément clé dans cette séance expérimentale. L'avancée de la recherche dans cette séance d'apprentissage sortant complètement de ce qui est habituel pour les élèves dépend non seulement des interactions entre les élèves mais aussi des interventions de l'enseignant dans chacun des groupes de travail.

Dans ce cas, l'enseignant doit inviter les élèves à revenir sur la description de la configuration donnée : « faites une comparaison entre cette configuration et la construction de Descartes : quelles ressemblances et quelles différences ? Quelles conditions doivent être analogues entre les autres configurations et celle-ci pour que BE soit toujours la représentation du produit de BC par DE ? Identifiez-vous des relations entre les segments constituant cette configuration ? Lesquelles ? » L'enseignant doit également faire vérifier que le projeté orthogonal des points est effectivement bien fait : « observez la nouvelle configuration obtenue en construisant les projetés orthogonales des points. Que voyez-vous ? Quelles relations pouvez-vous établir entre les segments constituant cette nouvelle configuration ? Ecrivez-les. Regardez en parallèle les relations entre les segments dans la première configuration, puis dans la deuxième. Y a-t-il la possibilité d'établir des relations ou des égalités entre certains éléments de la première configuration et certains éléments de la deuxième configuration de sorte que l'on puisse prouver que l'abscisse du point E est effectivement le produit des abscisses des points C et D ? ».

QUATRIEME QUESTION (a)

Travail avec l'annexe 4

IV. Première partie. Nous allons étudier une nouvelle configuration, similaire à la configuration précédente, mais celle-ci est située dans le plan complexe avec certains éléments complémentaires.

a. Soit $O; \vec{u}, \vec{v}$ un repère orthonormal direct du plan appelé plan complexe. Nous vous rappelons qu'un nombre complexe est appelé affixe d'un point M et d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$.

– Pouvez-vous affirmer que dans cette représentation géométrique, la multiplication de z et z' donne toujours le produit z'' (affixe du point E et du vecteur $\overrightarrow{BE}$) ? Expliquez votre réponse ;

– Dans votre réponse à la question précédente, avez-vous établi des liens entre $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{BD}\|$ et $\|\overrightarrow{BE}\|$? Lesquels ? Et entre $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOD}$ (les angles associés aux facteurs) et $\widehat{AOE}$ (l'angle associé au produit) ? Si vous ne les avez pas encore considérés, quels liens établiriez-vous entre ces éléments pour expliquer la représentation géométrique de deux nombres complexes ?

Annexe 4

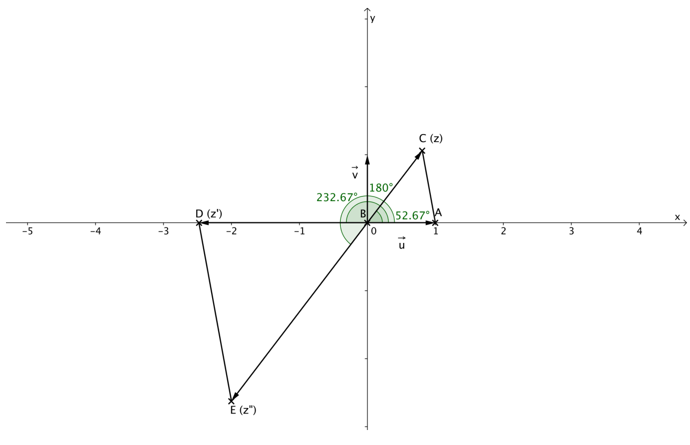


Figure 8.4 –

Procédures de résolution, entrée dans l'ETM et commentaires

Les résultats du questionnaire proposé l'année dernière dans quatre classes de Terminale S nous permettent de faire l'hypothèse que la réponse la plus fréquente fera référence au théorème de Thalès. De ce fait, les élèves pourront bien transposer au plan complexe ce qu'ils ont déjà fait jusqu'à la troisième question, mais l'égalité issue de la proportionnalité des segments dans la configuration initiale devrait maintenant être exprimée en termes de norme des vecteurs ou des modules.

Parmi les réponses à la première question *4.a*, il n'y aura probablement pas de références aux angles, étant donnée leur absence dans les questions précédentes. Par contre, puisque nous les avons introduits dans la configuration géométrique située dans le plan complexe, il se peut qu'en cherchant des réponses à la deuxième question les élèves puissent s'en servir et même enrichir leurs réponses à la première.

Le fait d'insister de façon indépendante sur les liens existant entre les modules et entre les angles vise à ce que les élèves puissent transposer les relations entre les longueurs (facteurs) et le produit dans la configuration de la multiplication de Descartes à la relation existante entre les modules et le produit des nombres complexes. Par contre, les modules n'étant que mentionnés, il n'y a aucune information explicite et additionnelle qui puisse faciliter cette mise en relation. De ce fait, sachant ce qu'est un module, nous nous attendons à ce qu'ils puissent chercher des relations faisant appel aux opérations mathématiques élémentaires (ce qui déjà fait pour les angles) : le module du produit est égal au produit des modules des facteurs. D'une part, il s'agit de se rendre compte de la pertinence du théorème de Thalès pour justifier le produit des longueurs de Descartes et le produit de modules dans le plan complexe. D'autre part, le travail avec la même configuration dans le plan complexe vise à ce que les élèves puissent déjà l'identifier comme une représentation géométrique du produit pour différents ensembles de nombres.

En outre, c'est maintenant que les élèves pourront se rendre compte d'une autre propriété qui entre en jeu avec le changement de cadre (des longueurs aux représentations géométriques de nombres). C'est une relation toujours existante mais qui, jusqu'à ce moment de la séquence, était restée implicite. Nous tenons à ce que les mesure d'angles données sur la figure puissent la faire émerger plus facilement : l'angle du produit est la somme des angles des facteurs.

De ce fait, des éléments qui pourraient s'intégrer et même être explicités dans les réponses des élèves sont les suivants :

– Somme d'angles et théorème de Thalès explicite avec des normes ou des modules ;
– Somme d'angles et multiplication de modules ou de normes ;
– Somme des angles non orientés et multiplication de modules ;
– Somme d'angles, mesures de modules et théorème de Thalès pour justifier le produit ;
– Expression non affine du théorème de Thalès, donnée juste par correspondance visuelle de la représentation géométrique avec les autres déjà travaillées ;
– Théorème de Thalès explicite avec des normes ou des modules sans référence aux angles ;
– Multiplication de normes ;

Les vecteurs et les angles associés devraient favoriser la détermination du produit comme le résultat des transformations dans le plan même si elles n'ont jamais été institutionnalisées ni même mentionnées avant cette séance.

La mise en relation de la position du produit, déjà évoquée dans les questions précédentes, et les propriétés de la multiplication des nombres complexes, serait le résultat d'un travail purement concret sur la figure, contrairement à ce que les élèves font habituellement en classe de Terminale S où la géométrie est essentiellement analytique. De ce fait, leur capacité à mettre en lien multiplication et géométrie devient difficile à déterminer : comment les élèves vont-ils établir des liens entre la multiplication algébrique qu'ils connaissent bien et la multiplication géométrique des nombres complexes ? Cette mise en relation, serait-elle possible ? *A priori*, nous ne pouvons pas le prévoir. Leurs connaissances algébriques de la multiplication des nombres complexes ne leur seront pas d'une grande utilité pour le travail demandé.

Pour les élèves qui n'ont appris par cœur ni les propriétés du produit complexe, ni les liens entre ce produit, l'homothétie et la rotation, la recherche des relations entre les facteurs et le produit représenté géométriquement est un grand défi cognitif. Nous demandons un travail de découverte fondé sur un processus de description, comme celui dont parle Duval (2003). La façon plutôt traditionnelle dont la première question a été posée pourrait amener plus facilement les élèves à la recherche d'une démonstration algébrique des propriétés du produit. Par contre, établir des liens entre les facteurs et le produit, et devoir expliquer la représentation géométrique de la multiplication des nombres résulte d'une entrée cognitive dans l'ETM telle que nous l'avions déjà mentionnée dans l'analyse de la question précédente.

Finalement, les liens entre le produit algébrique et les transformations n'est pas évident, à moins que les élèves connaissent ce qu'une multiplication par i signifie. Il nous faudra donc recueillir auprès des élèves une explicitation écrite des interprétations du produit à ce moment de la séance.

Interventions de l’enseignant en cas de blocage

L’enseignant peut : faire remarquer qu’il y a des relations qui sont presque explicites entre les angles des facteurs et l’angle du produit. Inviter les élèves à trouver des relations analogues entre les modules. Il n’y aura pas d’autres médiations de l’enseignant puisque le but maintenant n’est que la mise en œuvre des relations déjà établies entre multiplication et géométrie.

QUATRIEME QUESTION (b)

Travail avec l'annexe 5

IV. Deuxième partie.

b. Observez les représentations géométriques de deux nombres complexes dans la configuration « Figure E ».

– En prenant en compte tes réponses dans les questions précédentes construire la représentation géométrique du produit de z et z' ;

– Décrire votre construction ;

– Quelles propriétés de la multiplication est-il possible de vérifier grâce à la représentation géométrique des deux nombres complexes ?

Annexe 5

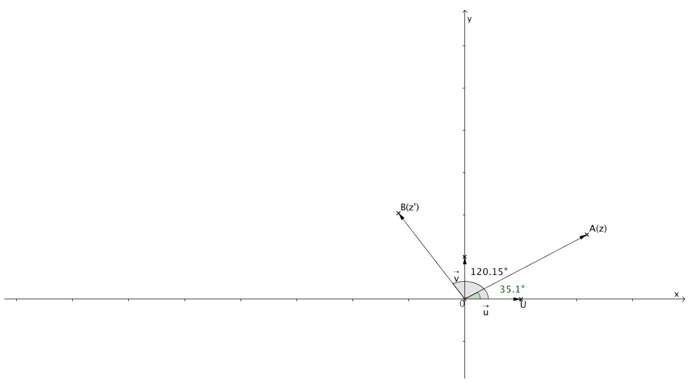


Figure 8.5 –

Procédures de résolution, entrée dans l'ETM et commentaires

La construction correcte du produit n'est plus que la preuve de la compréhension de la question précédente : si les élèves ont compris les propriétés géométriques de la multiplication des nombres complexes, ils n'auront qu'à les mettre en œuvre. Par contre, un autre processus est visé : cette construction devrait s'appuyer non seulement sur les propriétés de la multiplication des nombres complexes mais aussi sur le produit de Descartes et le théorème de Thalès. Ainsi, la construction attendue doit porter sur une construction de triangles semblables et d'une rotation de 90° de l'angle $\widehat{UOA}$. Nous pourrons alors reconnaître une compréhension globale de la multiplication comme une transformation dans le plan. La façon d'aborder la construction doit être complètement libre donc il n'y a pas d'interventions supplémentaires de l'enseignant à ce propos.

Des blocages dans les questions précédentes pourraient empêcher cette construction. Cela serait aussi le cas si les élèves utilisent des propriétés géométriques de la multiplication de nombres complexes et se contentent de mesurer les facteurs et de les multiplier puis d'additionner les angles et de placer le produit en fonction de l'unité ou en centimètres. D'autres éléments de réponse possibles à cette question sont les suivants :

- Somme d'angles et multiplication de normes de vecteurs en fonction de l'unité u ;
- Somme d'angles et multiplication de normes de vecteurs en mesurant en centimètres les représentations des vecteurs donnés ;
- Somme d'angles et théorème de Thalès explicitement utilisé pour calculer la longueur du produit en fonction de l'unité u ;
- Somme d'angles et théorème de Thalès explicitement utilisé pour calculer la longueur du produit après la mesure des représentations des vecteurs donnés ;
- Somme d'angles et position du produit en fonction du produit des projetés orthogonaux des points A et B, ceci résultant d'une influence des procédures demandées dans la question précédente ;
- Pas de construction ;
- Construction rendant compte seulement de la mesure des angles ;
- Somme d'angles. Tracé de la droite (AU) puis de sa parallèle passant par B. Le produit est placé à l'intersection de la droite parallèle à (AU) passant par B et de la droite signalant la somme des angles passant par O. Cette procédure pourrait venir du fait qu'il y a toujours eu des parallèles dans les configurations précédentes, alors il faudrait y en ait aussi dans cette construction ;
- Construction de triangles semblables avec ou sans rotation de 90° de l'angle $\widehat{UOA}$.

CINQUIEME QUESTION

V. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle signification géométrique pouvez-vous donner à la multiplication ?

Procédures de résolution, entrée dans l'ETM et commentaires

Multiplication et géométrie dans cette séance :

Par signification géométrique de la multiplication nous entendons ce que le produit représente en géométrie. En d'autres termes, le fait de multiplier génère un résultat en géométrie : le produit est visible et interprétable à partir de l'opération faite. Les élèves pourraient revenir aux configurations géométriques, étudier le produit, réfléchir à ce qu'on a fait, décrit, expliqué, construit : quelle est la position du produit par rapport aux facteurs ? De quoi dépend son changement de position ? Et en dehors du travail de cette séance, comment la multiplication a été représentée d'une façon géométrique ? Y a-t-il une relation entre les représentations géométriques de la multiplication qu'ils connaissent déjà et celle qui a été travaillée au cours de cette séance ? Laquelle ? Quelles différences et quelles ressemblances ?

Les réponses des élèves pourraient faire référence à une synthèse de la séance ou bien elles peuvent faire une référence isolée aux contenus suivantes :

- Références à une réduction ou à un agrandissement.
- Références à un déplacement en mentionnant ou non la règle de signes.
- Références aux propriétés de la multiplication des nombres complexes.
- Références aux propriétés de la multiplication des nombres complexes en langue naturelle.
- Référence aux éléments théoriques et géométriques associés à la multiplication tout au long de la séquence (Descartes, théorème de Thalès, longueurs, angles, nombres complexes) sans nécessairement représenter les figures.
- Référence aux éléments présents dans chacun des produits représentés : description des techniques justifiant le produit (Thalès, règle de signes, propriétés de la multiplication des nombres complexes.)
- Référence à une variation du produit (position et signe) en fonction de la variation d'un des facteurs (rapport de proportionnalité implicite).
- Référence à la multiplication de Descartes.

– Références aux propriétés de la représentation géométrique de la multiplication des nombres complexes.
– Référence à l'agrandissement ou à la réduction d'une surface.
– Référence à la multiplication des nombres complexes en termes de rotation et d'homothétie.
– Conclusion en termes de transformations.

Quelques réflexions générales par rapport au lien entre multiplication et géométrie :

Intuitivement, nous dirions que si l'on multiplie deux entiers naturels associés à des longueurs, le produit sera visiblement *une aire*. Le produit est aussi géométriquement visible comme une addition réitérée si on multiplie n fois une longueur ou n fois une aire. Et si $n < 1$ le produit sera une réduction. Quoi que l'on fasse la multiplication transforme : le produit est une transformation dans le plan. Cette interprétation de la multiplication n'est jamais vue avant l'introduction des homothéties. Elle est pourtant une interprétation élémentaire de la multiplication. Est-il possible de percevoir cette signification de la multiplication ? Probablement il faut des travaux spécifiques comme ceux de Mason et Watson (2010. Entretien) où l'homothétie a été travaillée avec des jeunes enfants en représentant la multiplication par le prolongement ou le rétrécissement d'un élastique. Mais nos élèves pourront-ils exprimer ce que la multiplication signifie en géométrie en lien avec l'idée de transformation ? Les activités que nous allons proposer seront-elles pertinentes ? Leurs descriptions, leurs analyses, leurs explications et leurs constructions tout au long de cette séance pourront-elles les amener à une telle observation ?

Mise en commun :

Pour la mise en commun il est attendu que certains élèves passent au tableau montrer leurs conclusions. La réponse à partager sera la dernière question de la séquence. Le plus important est de les motiver à s'exprimer sur les observations qu'ils ont faites pour arriver à leur réponse. Ils peuvent montrer des exemples, des figures sur lesquelles ils se sont appuyés, des souvenirs de travaux précédents. Ils pourront aussi donner leur opinion personnelle sur le travail réalisé pendant la séance.

L'enseignant pourra répéter des remarques faites pendant la séance comme celles associées à la position du produit, à son déplacement en fonction des facteurs. Il peut aussi faire remarquer qu'ils n'ont pas travaillé le produit de deux nombres négatifs car cela correspond à une représentation géométrique dont les justifications ne se trouvent pas dans les notions abordées au collège. Par contre, il serait très intéressant de retenir l'idée que le produit est une transformation dans le plan (revenir aux exemples) comme nous l'avons vu explicitement avec les nombres complexes.

Optionnel :

« Dans une prochaine séance (où dans une activité en dehors des heures de cours, petit devoir maison, etc.), nous allons clore cette activité en regardant une vidéo appelée « dimensions » (15 minutes). Nous y verrons de plus près ce lien entre les points (des êtres géométriques) et les nombres (des êtres algébriques). Ils se mélangent ! Vous savez déjà ce que c'est la géométrie algébrique. Vous la pratiquez souvent dans vos cours de mathématiques.

Nous allons finir cette séance avec quelques mots des auteurs de cette vidéo : « Si les points d'une droite sont des nombres, on doit pouvoir comprendre géométriquement la signification des opérations élémentaires entre nombres : l'addition et la multiplication. La clé de cette compréhension est dans l'idée de transformation ». Merci beaucoup de votre participation. »

Le lien de la vidéo :

http ://www.dimensions-math.org (voir seulement le chapitre 5)

8.2 Analyse des réponses des élèves de Terminale S : constitution de profils pour l'étude de différents parcours à l'intérieur d'un ETM personnel

8.2.1 Introduction

Nous nous situons dans un espace de travail mathématique dans lequel nous allons identifier et décrire le fonctionnement des genèses cognitive et épistémologique (Kuzniak, 2012) mises en œuvre pour la résolution de la tâche proposée aux élèves. Nous nous intéressons aux relations produites entre les composantes internes à chacun des plan de l'Espace de Travail Mathématique ainsi qu'à celles produites entre les composantes des différents plans.

Dans cette section, nous allons rendre compte de diverses classifications des réponses des élèves, lesquelles vont nous conduire à la constitution de *profils* d'individus. Ces profils nous permettront à leur tour d'établir différents parcours de réponses à l'intérieur de l'Espace de Travail Mathématique personnel des différents individus (groupes de travail). Ces parcours commencent avec la multiplication de Descartes et finissent avec les significations géométriques de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

L'intégration de nos différentes stratégies d'analyse nous permettra de donner petit à petit des réponses à notre deuxième question de recherche : **peut-on identifier et différencier des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM personnel (ou approprié) des élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?**

Avant de commencer nous voudrions juste souligner que le choix de notre méthodologie initiale d'analyse mixte a été un outil répondant à notre besoin de simplifier la façon d'aborder l'analyse des données recueillies : « étant donné nos difficultés à aborder l'analyse des données recueillies, cette méthodologie mixte fait partie d'une stratégie qui nous permettra, d'une certaine manière, de focaliser l'analyse didactique sur des éléments spécifiques résultant des points communs entre une première analyse *à la main* et les information fournies par les arbres de similarité. Ceci est un élément clé qui justifie notre choix méthodologique car il s'agit d'un point d'entrée qui permet de satisfaire notre besoin d'aborder notre analyse d'une façon organisée qui nous conduise, petit à petit, à choisir les données les plus appropriés qui feront l'objet de nos analyses didactiques les plus profondes. »

Finalement, nous vous invitons, avant d'entrer au coeur de nos analyses et pour une meilleure compréhension d'elles mêmes, à revenir à notre méthodologie présentée en détail dans la section 5.1.2.

8.2.2 Une première classification des réponses des élèves

Le premier pas dans la construction d'une classification des individus (groupes de travail) a été la recherche des réponses et des non-réponses à la dernière question. Sur un total de 34 groupes d'élèves, y compris trois travaux individuels en C1 (cf. Section 5.1.2), nous avons trouvé 24 réponses effectives :

PREMIERE CLASSIFICATION

Classe	Réponse à la dernière question	Non-réponse à la dernière question
C1	10/15	5/15
C2	7/8	1/8
C3	3/7	4/7
C4	4/4	0
Total	24/34	10/34

Étant donnée la diversité des réponses effectives à la dernière question, nous avons établi une deuxième classification selon le type de réponse donnée. Nous présentons ci-dessous les réponses retrouvées parmi les réponses des élèves (certains éléments de réponse sont illustrés par des exemples de réponses trouvées dans les productions, donnés en italique) :

– Références à une réduction ou à un agrandissement.
– Références à une réduction, à un agrandissement et à un déplacement en mentionnant la règle de signes.
– Références à une réduction, à un agrandissement, à un déplacement et aux propriétés de la multiplication des nombres complexes.
– Références aux propriétés de la multiplication des nombres complexes en langue naturelle.
– Référence aux éléments théoriques et géométriques associés à la multiplication tout au long de la séquence (Descartes, théorème de Thalès, longueurs, angles, nombres complexes) sans nécessairement représenter les figures.

– Référence aux éléments présents dans chacun des produits représentés : description des techniques justifiant le produit (Thalès, règle de signes, propriétés de la multiplication de nombres complexes.)
– Référence à une variation du produit (position et signe) en fonction de la variation d'un des facteurs (rapport de proportionnalité implicite).
– Référence à la multiplication de Descartes : *cela obéit à la règle de signes lors d'une multiplication de toute nature.*
– Références aux propriétés de la représentation géométrique de la multiplication des nombres complexes et au théorème de Thalès.
– Référence à une *multiplication de vecteurs* pour en trouver un autre.
– Référence à l'agrandissement d'une surface.
– Référence au fait que le théorème de Thalès *aide à faire la multiplication* (des représentations géométriques sont données comme des exemples de produit positif ou négatif).
– Références aux propriétés de la multiplication des nombres complexes et au théorème de Thalès. Réponse non développée.
– Référence à la multiplication des nombres complexes en termes de rotation et d'homothétie.
– Références à une réduction ou à un agrandissement ainsi qu'aux propriétés de la multiplication des nombres complexes. Conclusion en termes de transformations.

Le pas suivant a consisté à regrouper ces réponses selon un critère concernant le contenu mathématique le plus prépondérant dans chacune. Ainsi, nous avons finalement les classes suivantes :

– Transformations (T) : des réponses se référant aux réductions, agrandissements, déplacements ainsi qu'à une rotation ou à une homothétie.
– Complexe (C) : des réponses se référant exclusivement, et en langue naturelle, aux propriétés de la multiplication des nombres complexes, sans faire de référence explicite aux transformations géométriques.
– Proportionnalité - Thalès (PTTh) : des réponses explicitant les relations de proportionnalité ou le théorème de Thalès avec ou sans représentations géométriques et mentionnant ou non la multiplication des nombres complexes.

Compte tenu de ce qui précède, nous avons fait une deuxième classification des 24 individus qui ont donné une réponse à la dernière question, cette fois-ci, en fonction du regroupement des réponses ci-dessus et des codages associés :

DEUXIEME CLASSIFICATION

Classe	T Transformations	C Complexe	PTTh Proportionnalité - Thalès
C1	7/10	2/10	1/10
C2	1/7	5/7	1/7
C3	0	1/3	2/3
C4	2/4	0	2/4
Total	10/24	8/24	6/24

Nous pouvons observer dans cette classification que la plupart des élèves ont répondu à la dernière question en mentionnant des transformations géométriques ou en se référant à la multiplication de nombres complexes. Par contre, les réponses proposées dans chaque classe établie en suivant le critère ci-dessus présentent encore des différences qu'il n'est pas possible d'identifier avec cette catégorisation. Par exemple, de quelle compréhension ces réponses rendent-elles compte ? Y a-t-il des aspects communs entre elles ? Si oui, lesquels ? Pour répondre à ces questions nous allons proposer d'autres classifications qui seront transversales à celles déjà proposées. Dans la section suivante, nous allons expliquer ces nouveaux critères de classification.

8.2.3 Des nouvelles classifications transversales

Un deuxième critère de classification s'impose suite à une révision des réponses effectives des élèves. Dans la recherche de ressemblances et de différences entre elles, nous avons remarqué un aspect transversal par rapport à la classification précédente : les réponses, rendaient compte ou non, d'une synthèse de la séance.

Ainsi, nous allons affiner encore plus notre classification et notre deuxième critère sera donc de déterminer quelles sont les réponses portant sur une synthèse (S) et quelles sont les réponses qui se sont concentrées sur un aspect spécifique ou sur des connaissances préalables non travaillées au cours de la séance (non-S). De ce fait, pour cette nouvelle classification, nous allons reprendre le tableau ci-dessus, en rajoutant un sous-critère "synthèse (S)" ou "non synthèse (non-S)" de sorte que nous puissions identifier pour chacune des réponses des élèves déjà classées selon T, C ou PTTh, quelles sont les réponses rendant compte d'une synthèse de la séance et quelles réponses ne le faisant pas.

Cette synthèse est importante car nous nous intéressons, d'une façon particulière, au fait de déterminer l'influence de notre séquence d'apprentissage sur la dernière réponse de cette séquence. Des effets de notre signe-artefact pourraient -ils nous permettre de trouver des éléments de différenciation des parcours des individus ?

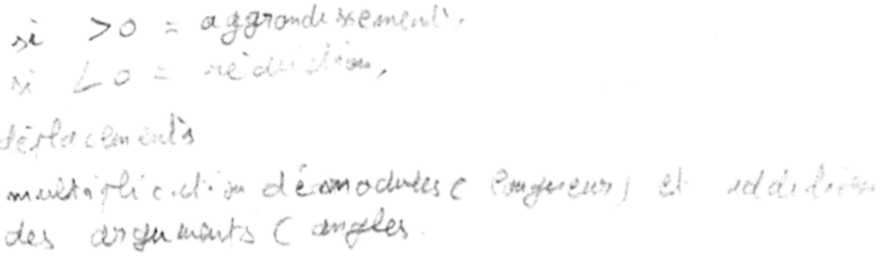
DEUXIEME CLASSIFICATION DES REPONSES EFFECTIVES DES ELEVES

	T		C		PTTh	
Classe	**S**	**non S**	**S**	**non S**	**S**	**non S**
C1	4/10	3/10	0	2/10	1/10	0
C2	0	1/7	0	5/7	1/7⋆	0
C3	0	0	0	1/3	2/3	0
C4	2/4	0	0	0	1/4	0
Total	6/24	4/24	0	8/24	6/24	0

Les réponses ne mentionnant que la multiplication des nombres complexes ne rendent pas compte d'une synthèse de la séance, contrairement à certaines réponses faisant référence aux transformations géométriques ou au théorème de Thalès [1]. Nous ne connaissons pas vraiment les raisons pour lesquelles certains élèves ont répondu à notre dernière question en faisant seulement référence aux propriétés de la multiplication des nombres complexes. La possibilité de la non compréhension de l'énoncé est toujours présente, mais nous trouvons intéressant de faire l'hypothèse que ces réponses pourraient correspondre à une sorte de synthèse de la part d'élèves qui auraient pris conscience du fait que la multiplication des nombres complexes peut être une généralisation de toutes les autres représentations géométriques de la multiplication travaillées pendant la séance. Par contre, nous ne pouvons pas en dire autant des réponses s'exprimant seulement en termes d'agrandissement et de réductions. Nous reviendrons plus tard sur ce point.

En étudiant les synthèses trouvées dans les réponses des élèves, nous voyons qu'elles comportent la plupart du temps une référence explicite à la représentation géométrique de la première question dans les termes suivants : *théorème de Thalès, agrandissement, multiplication de longueurs et produit positif*. Les références à la deuxième question ont été faites en termes de *réduction et de raccourcissement*. Les références à la troisième question ont été faites en termes de *déplacement ou de produit négatif*. Finalement, dans la quatrième question des références ont été faites aux propriétés de la multiplication des nombres complexes : somme des angles et multiplication des modules.

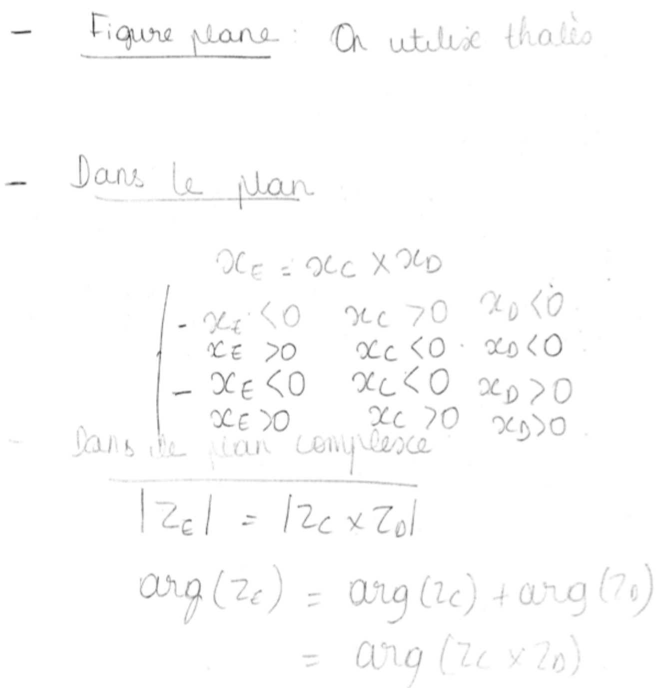
1. Une des réponses ci-dessus, la réponse de la classe C2, PTTh-S⋆, correspond à une réponse proposant une synthèse partielle, puisque elle ne rend pas compte de la multiplication des nombres complexes. Par contre, la présence de représentations géométriques se référant à la première et à la troisième question nous fait penser à une "intention" de synthèse. En effet, ces deux représentations nous donnent une idée de deux moments très différents de la séquence, puisqu'un changement de cadre s'est produit : le passage de la multiplication entre deux nombres positifs à la multiplication par un nombre négatif s'est produit en passant de la représentation géométrique de la multiplication de deux longueurs à la représentation de la multiplication d'abscisses dans le plan cartésien.



si >0 = aggrandissement,
si <0 = réduction,
déplacements
multiplication des modules (longueurs) et addition
des arguments (angles .

Figure 8.6 – Question 5, I4-C4

Un autre aspect qu'il nous semble intéressant de mentionner est la diversité des séquences étudiées, même si toutes font appel à une synthèse. Certaines réponses, comme celles de I4-C4 et de I1-C3, rendent compte pas à pas de ce qui s'est passé dans chaque question.



– Figure plane : On utilise thalès

– Dans le plan

$x_E = x_C \times x_D$

- $x_E < 0$ $x_C > 0$ $x_D < 0$
  $x_E > 0$ $x_C < 0$ $x_D < 0$
- $x_E < 0$ $x_C < 0$ $x_D > 0$
  $x_E > 0$ $x_C > 0$ $x_D > 0$

– Dans le plan complexe

$|z_E| = |z_C \times z_D|$

$\arg(z_E) = \arg(z_C) + \arg(z_D)$
$= \arg(z_C \times z_D)$

Figure 8.7 – Question 5, I1-C3

Par contre il y a d'autres réponses où cette synthèse a été faite d'une façon plus générale, ce qui nous semble montrer une intention d'unification de l'ensemble du travail fait pendant la séance.

D'après cette séance on peut donner comme
Signification à la multiplication : qu'il y a un
lien entre des angles
mais aussi entre des normes et enfin entre
des coordonnés
La multiplication est liée avec l'agrandissement
et la réduction.

Figure 8.8 – Question 5, I7-C1

La réponse de I7-C1 est un exemple de cette unification, mais nous verrons que cette intention est encore plus claire dans les réponses de I1-C4 et celle de I3-C1 où la généralisation, par rapport à la signification géométrique de la multiplication, se voit dans l'utilisation conjointe des termes « position » et « transformation ».

Dans la 1ère annexe on obtient un allon-
gement du segment [BC]. Dans l'annexe
2, on obtient un raccourcissement de [BC].
Dans le troisième cas on a rassemblé
tous les points d'un plan sur une seule
droite, l'axe des abscisses. Dans la
figure 4 on a ajouté les angles et les
modules.
Pour conclure, on a travaillé à partir
de points préexistants qui ont subit des
transformations géométriques, afin
d'obtenir de nouveaux points, produits
de la multiplication.

Figure 8.9 – Question 5, I1-C4

Par ailleurs, il nous semble important de considérer un autre aspect dans nos analyses, nous permettant de faire un deuxième zoom sur les réponses à la dernière question. Notre choix a été déterminé par notre intérêt pour l'identification du cadre mathématique prédominant dans le discours produit par les élèves, et pour l'intégration et l'interaction entre plusieurs cadres mathématiques (cf. Section 4.3.1) dans les réponses données tout au long de la séquence.

Nous avons alors identifier un autre facteur à prendre en compte, qui pourrait intervenir d'une façon très intéressante dans l'étude des interactions entre différents cadres mathématiques. Le nouveau critère de classification mis en place concerne l'existence, ou non, d'une référence explicite ou implicite à la règle de signes (RS) dans les réponses des élèves à la dernière question.

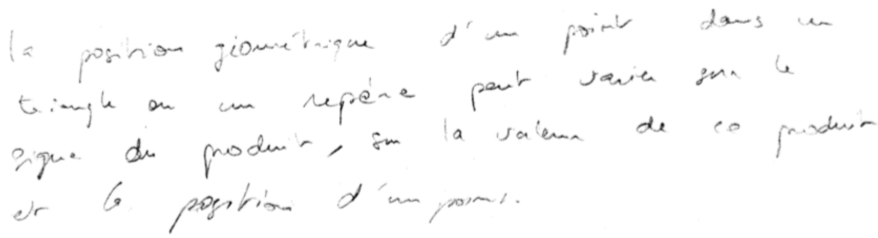

la position géométrique d'un point dans un triangle ou un repère peut varier sur le signe du produit, sur la valeur de ce produit et la position d'un point.

Figure 8.10 – Question 5, I3-C1

Ce dernier choix de classification nous permet de finaliser les profils types qui seront ensuite analysés plus finement.

Il faut juste clarifier un point : nous ne supposons pas que la règle de signes pourrait rendre compte de la prédominance d'un cadre mathématique algébrique ou numérique dans l'ensemble des réponses à la séquence. Notre intérêt est plutôt d'étudier si, et comment, un contenu institutionnalisé sans référence à la géométrie (cf. Chapitre 3) pourrait être intégré à cette nouvelle expérience, où une mise en relation entre différents cadres mathématiques est attendue et où les représentations géométriques sont visées comme élément clé à considérer dans chacune des réponses.

TROISIEME CLASSIFICATION DES REPONSES EFFECTIVES DES ELEVES

-	**T**				**C**				**PTTh**			
-	**S**		**nonS**		**S**		**nonS**		**S**		**nonS**	
Classe	**RS**	**non RS**	**RS**	**non RS**	**RS**	**non RS**	**RS**	**non RS**	**RS**	**non RS**	**RS**	**non RS**
C1	2/10	2/10	-	3/10	-	-	-	2/10	1/10	0	-	-
C2	0	0	-	1/7	-	-	-	5/7	1/7	0	-	-
C3	0	0	-	0	-	-	-	1/3	1/3	1/3	-	-
C4	0	2/4	-	0	-	-	-	0	1/4	1/4	-	-
Total	2/24	4/24	-	4/24	-	-	-	8/24	4/24	2/24	-	-

Compte tenu de ce qui précède, un résultat déjà intéressant pour nous est le constat que dans le tableau ci-dessus les seules réponses ayant fait référence à la règle des signes dans la dernière question sont celles du type T-S et PTTh-S. Finalement, nous avons théoriquement, pour les 24 individus de l'étude, six profils différents dont nous allons étudier les parcours. ces profils sont : T-S-RS, T-S-nonRS, T-nonS-nonRS, C-nonS-nonRS, PTTh-S-RS et PTTh-S-nonRS.

8.2.4 Etude des éléments de réponse aux autres questions de la séquence : recherche de parcours caractéristiques des profils résultant des réponses à la dernière question

Tout d'abord, nous allons donner dans des listes simplifiées les réponses possibles à chacune des autres questions de la séquence. Ces réponses peuvent être une composition de plusieurs éléments intégrés dans une seule réponse ou bien elles peuvent juste correspondre à un des éléments de réponse possibles. Ces éléments ont été retrouvés parmi les réponses données par la totalité des élèves qui ont fait l'expérience. Nous incluons un code pour chacune des réponses et nous les présentons en commençant par l'avant dernière question.

Nous avons aussi associé à chacun des individus toutes ses réponses. Nous présentons ces associations dans des tableaux où les individus ont été regroupés selon la classe à laquelle ils appartiennent (C1, C2, C3 ou C4). Pour simplifier les tableaux, nous avons associé un numéro à chacune des réponses, ce numéro correspond à l'ordre dans lequel elles seront présentées dans les listes ci-dessous. Dans chacune de ces listes, les réponses en *italique* correspondent à celles qui ont été données exclusivement par des individus qui n'ont pas répondu à la dernière question. De la même manière ces individus ont été aussi identifiés en *italique* dans les tableaux de réponses.

Par la suite, nous présentons les listes des éléments de réponses à toute la séquence dont nous avons parlé ci-dessus. Pour les questions *4.b.* et *4.a.*, nous présentons, à titre d'exemple, le tableau complet des réponses des individus appartenant à la classe 1 (C1).

Pour les autres questions, et les autres classes, nous présentons seulement un tableau donnant le total des réponses pour chaque élément. Les tableaux complets sont tous donnés en annexe (cf. Annexe E)

Question 4.b. :

1. Somme d'angles et multiplication de normes de vecteurs en fonction de u, (SA-MNu) ;

2. Somme d'angles et multiplication de normes de vecteurs en mesurant en centimètres les représentations des vecteurs donnés, (SA-MNcm) ;
3. Somme d'angles et théorème de Thalès explicitement utilisé pour calculer la longueur du produit en fonction de u, (SA-TTh(4)u) ;
4. Somme d'angles et position du produit en fonction du produit des projetés orthogonaux des points A et B, (SA-ProjO) ;
5. Pas de construction ou construction incomplète, (PasR) ;
6. Somme d'angles. Tracé de la droite (AU) puis de sa parallèle passant par B. Le produit est placé à l'intersection de la droite parallèle à (AU) passant par B et de la droite signalant la somme des angles passant par O, (SA-MauPar).
7. *Construction de triangles semblables avec ou sans rotation de* 90° *de l'angle* UOA*, (TriS).*
8. Somme d'angles, (SA).

Question 4.a. :

1. Somme d'angles et théorème de Thalès explicite avec des normes ou des modules, (SA-TTh(4)-Mo) ;
2. Somme d'angles et multiplication de modules ou de normes, (SA-Mmo) ;
3. Somme des angles non orientés et multiplication de modules, (SAnonO-Mmo) ;
4. Somme d'angles, mesures de modules et théorème de Thalès, (SA-Memo-TTh(4)) ;
5. Expression non affine du théorème de Thalès, (TTh(4)) ;
6. Théorème de Thalès explicite avec des normes ou des modules sans référence aux angles, (TTh(4)-nonA) ;
7. *Muliplication de normes, (MN)* ;
8. *Pas de réponse, autre (PasR-Autre).*

CLASSE 1 (C1)

-	4.b								4.a							
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C1-I1		X							X							
C1-I2		X								X						
C1-I3		X							X							
C1-I4			X									X				
C1-I5						X			X							
C1-I6	X												X			
C1-I7						X				X						
C1-I8						X								X		
C1-I9	X								X							
C1-I10		X														X
C1-I11				X								X				
C1-I12						X						X				
C1-I13							X			X						
C1-I14							X							X		
C1-I15	X														X	
Total	3	4	1	1	0	4	2	0	4	3	0	3	1	2	1	1

CLASSE 2 (C2)

-	4.b								4.a							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Total	5	1	0	1	1	0	0	0	4	2	1	1	0	0	0	0

CLASSE 3 (C3)

-	4.b								4.a							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C3-I7	3	1	0	1	1	0	0	1	2	1	0	2	0	0	1	1

CLASSE 4 (C4)

-	4.b								4.a							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Total	1	0	0	0	3	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0

Question 3.b. :

1. Règles de signes en termes d'abscisses. Référence à la variation de la position du produit en fonction de la position ou de la valeur des facteurs, (RS-Varp-Pf) ;
2. Règles de signes et référence à la valeur négative du produit, (RS-proN) ;
3. Règles de signes, référence à la valeur négative du produit et 'référence à' ou représentation de la configuration géométrique du papillon du théorème de Thalès, (RS-RG) ;
4. Pas de réponse, (PasR) ;
5. Expression de la règle des signes, (RS) ;
6. *Référence à la variation de la position sur la droite (BC) du produit, (Vpro)* ;
7. *Règles des signes en termes d'abscisses et expression du produit comme une homothétie de rapport BD, (RS-H)* ;
8. Autre, (Autre).

Question 3.a. :

1. Double théorème de Thalès, (TTh(3ab)) ;
2. Théorème de Thalès en fonction des abscisses, (TTh(3b)) ;
3. Théorème de Thalès en fonction des abscisses et expression de relations d'homothétie et d'agrandissement des triangles d'après l'analyse de la représentation géométrique donnée, (TTh(3b)T) ;
4. *Théorème de Thalès en fonction des abscisses et construction sur la figure du triangle ABC par symétrie centrale, (TTh(3)-Sy)* ;
5. Expression non affine du théorème de Thalès, (TTh(3)).
6. Expression non affine du théorème de Thalès et expression de BE et BC par homothétie, (TTh(3)-H) ;
7. *Pas de réponse, (PasR).*

CLASSE 1 (C1)

-	**3.b**								**3.a**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Total	5	0	0	7	0	2	0	1	7	5	1	0	0	0	2

CLASSE 2 (C2)

-	3.b								3.a						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Total	2	1	1	1	2	0	0	1	3	4	0	0	1	0	0

CLASSE 3 (C3)

-	3.b								3.a						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Total	0	0	1	1	3	0	1	1	4	1	0	1	0	1	0

CLASSE 4 (C4)

-	3.b								3.a						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Total	1	2	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	0	0

Question 2.b. :

1. Construction de Descartes et théorème de Thalès, (cD-TTh(2)) ;
2. Construction de Descartes et théorème de Thalès et référence à la position du produit en fonction de la position des facteurs, (cD-TTh(2)-pP) ;
3. *Référence à la valeur et à la position du produit en fonction de la position des facteurs, (VpP)* ;
4. Construction de Descartes et théorème de Thalès, référence aux réductions ou agrandissements (cD-TTh(2)-T) ;
5. Construction de Descartes, (cD) ;
6. Théorème de Thalès, (TTh(2)) ;
7. Théorème de Thalès et relation d'homothétie entre BD, BA, BE et BC, (TTh(2)-H) ;
8. Théorème de Thalès, mesures de segments et théorème de Thalès sur la figure, (TTh(2)-cm).

Question 1 :

1. Théorème de Thalès, (TTh(1)) ;
2. *Autre, (Autre)*.

CLASSE 1 (C1)

-	**2.b**								**1**	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**
Total	3	1	0	3	1	6	1	0	15	0

CLASSE 2 (C2)

-	**2.b**								**1**	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**
Total	3	2	0	0	1	2	0	0	8	0

CLASSE 3 (C3)

-	**2.b**								**1**	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**
Total	1	1	1	0	2	0	1	1	6	1

CLASSE 4 (C4)

-	2.b								1	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**
Total	0	1	0	2	0	0	0	1	4	

À partir des informations obtenues grâce aux listes ci-dessus et aux tableaux associés (cf. Annexe E), nous avons déterminé la réponse la plus fréquente pour chacune des questions de la séquence. Nous présentons par la suite des commentaires et des réflexions associés à chacune de ces réponses et nous verrons comment cette analyse nous donne des pistes qui vont nous conduire petit à petit à l'analyse de parcours d' individus.

Les réponses les plus fréquentes pour chacune des questions de la séquence : détermination du contenu mathématique prépondérant

- Pour la question *4.b.*, la réponse la plus fréquente est la réponse *1* avec une fréquence de 12/34 individus. Cette réponse correspond à la somme des angles et à la multiplication de normes de vecteurs en fonction de l'unité donnée. Cette réponse fait directement référence aux propriétés de la multiplication des nombres complexes.
- Pour la question *4.a.*, la réponse la plus fréquente est la réponse *1* avec une fréquence de 13/34 individus. Cette réponse correspond à la somme des angles et au théorème de Thalès explicite avec des normes de vecteurs ou des modules de nombres complexes.
  Cette réponse met en relation les propriétés de la multiplication des nombres complexes et le théorème de Thalès : ce dernier donne une justification discursive de la propriété concernant la multiplication des modules. C'est aussi à ce moment que l'addition des angles peut être intégrée explicitement en utilisant les arguments.
  A ce moment de la séance, l'intuition portant sur les transformations, c'est-à-dire toute référence à un agrandissement, réduction ou déplacement, trouve du sens si et seulement si les élèves peuvent les interpréter en fonction des normes des vecteurs.
- Pour la question *3.b.* la réponse la plus fréquente est la réponse *4* avec une fréquence de 9/34 individus. Cette réponse correspond à une non réponse à la question. Par contre, la deuxième réponse la plus fréquente avec une fréquence de 8/34 est la réponse *1*. Cette réponse fait une référence explicite à la règle des signes en termes d'abscisses ainsi qu'à la variation de la position du produit en fonction de la position ou de la nature des facteurs.
  Cette réponse est très intéressante et significative. Nous savons déjà qu'il n'y a que quatre

élèves ayant fait référence à la règle des signes dans la dernière question et dix élèves qui ont parlé de transformations. De ce fait, il nous semble très important de nous questionner sur l'existence de liens entre les réponses données à la question *3.b* et les réponses données à la dernière question. Nous reviendrons sur cet aspect plus tard.

– Pour la question *3.a.* la réponse la plus fréquente est la réponse *1* avec une fréquence de 15/34 individus. Cette réponse correspond au double théorème de Thalès. Celle-ci était la réponse visée. Néanmoins nous voyons bien qu'à peine la moitié des élèves a bien mis en relation les deux configurations du théorème de Thalès pour justifier formellement le produit. Nous avions comme objectif que les élèves mobilisent des connaissances mathématiques préalables dans un contexte non traditionnel d'enseignement, nous constatons que c'est un objectif difficile à atteindre .
  Par ailleurs, en prenant en compte la diversité des réponses données par les élèves, les deux réponses les plus fréquentes concernent le théorème de Thalès. Mais ce type de réponse à la question *3.a.* n'est pas nécessairement suivie d'une réponse à la question *3.b* dans laquelle sont faits des liens intuitifs avec le déplacement ou une référence à la position ou à la variation du produit en fonction de la nature des facteurs.
– Pour la question *2.b.* la réponse la plus fréquente est la réponse *6* avec une fréquence de 8/34 individus. Cette réponse correspond au théorème de Thalès pour justifier la nouvelle représentation du produit sans faire référence à la position du produit en fonction de la nature fractionnaire d'un des facteurs. La réponse visée a eu une fréquence de 5/34, ce qui n'est pas très éloignée de la fréquence de la réponse prédominante.
– Pour la question *1* la réponse la plus fréquente est la réponse *1* avec une fréquence de 33/34 individus. Cette réponse correspond au théorème de Thalès pour justifier le produit de Descartes.

8.2.5 Une analyse intermédiaire : croisement des résultats avec un traitement statistique des données

Tout d'abord, une petite synthèse : les individus faisant partie de notre expérimentation ont été regroupés *à la main*[2] en fonction de leurs réponses à la dernière question. Dans une première classification, ils ont été associés à trois types de réponses possibles. Ces trois types de réponses ont été le résultat d'un regroupement des différents éléments faisant partie des réponses des élèves *a priori* et *a posteriori*.

2. i.e. nous avons étudié chaque séquence et chacune des réponses à la dernière question en cherchant des éléments de réponse en concordance ou non avec ceux que nous avions déterminés a priori.

Ces éléments de réponse ont aussi été traités avec le logiciel C.H.I.C. dont l'arbre de similarité associé à l'analyse nous a permis de retrouver, avec quelques variations bien sûr, les trois groupes déjà établis *à la main* : Transformation (T), Proportionnalité et théorème de Thalès (PTTh), Complexe (C). À ces trois groupes, nous associons certains éléments à partir de l'information donnée par l'arbre de similarité : réduction-agrandissement (R-A), déplacement (D), Transformation (T) sont associés au groupe Transformation (T) ; règle des signes (RS), théorème de Thalès (TTh), multiplication de Descartes (MD), multiplication de nombres complexes (MC) sont associés au groupe Proportionnalité et théorème de Thalès (PTTh) et propriétés de la multiplication de nombres complexes en langage naturel ou algébrique (PMC-LN ou PMC-LA) sont associés au groupe Complexe (C).

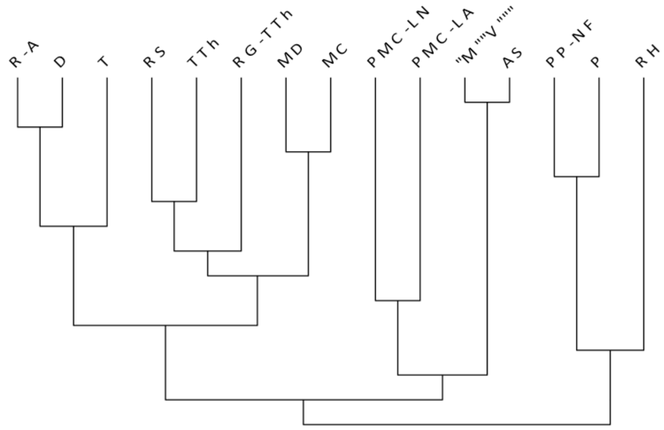


Figure 8.11 – Arbre de similarités en fonction des éléments de réponses à la dernière question de la séquence

Nous constatons dans cette classification un isolement du pôle *propriétés de la multiplication de nombres complexes* (PMC-LN ou PMC-LA). Nous nous questionnons alors sur la possibilité que l'énonciation des propriétés de la multiplication des nombres complexes soit, à un moment ou à un autre de la séquence, mise en relation, à travers une genèse figurale, avec l'interprétation des représentations géométriques du théorème de Thalès en termes de transformations géométriques.

Par ailleurs, l'arbre cohésitif ci-dessous confirme les relations ou l'absence de relations entre les éléments de réponse à la dernière question : le pôle complexe est isolé, par contre, la multiplication de Descartes constitue bien une classe d'implication avec la règle des signes et le théorème de Thalès. Nous reviendrons plus tard sur ce dernier aspect concernant le lien entre règle de signes et géométrie, qui est un questionnement dont nous avons déjà parlé précédemment : il nous semble important de considérer un autre aspect dans nos analyses, nous permettant de faire un deuxième zoom sur les réponses à la dernière question. Notre choix a été déterminé par notre intérêt pour l'identification du cadre mathématique prédominant dans le discours produit par les élèves, et pour l'intégration et l'interaction entre plusieurs cadres mathématiques dans les réponses données tout au long de la séquence. Nous avons alors identifier un autre facteur à prendre en compte, qui pourrait intervenir d'une façon très intéressante dans l'étude des interactions entre différents cadres mathématiques. Le nouveau critère de classification mis en place concerne l'existence, ou non, d'une référence explicite ou implicite à la règle de signes (RS) dans les réponses des élèves à la dernière question.

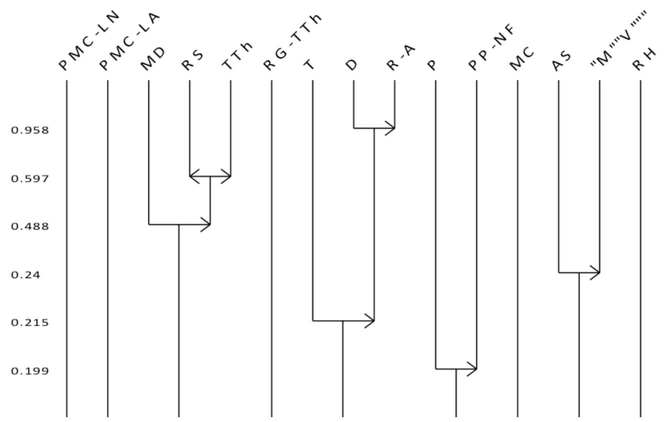


Figure 8.12 – Arbre cohésitif en fonction des éléments de réponses à la dernière question de la séquence

Dans les classifications précédentes, nous avions finalement identifié six profils différents d'individus toujours associés aux éléments de réponse à la dernière question (T-S-RS, T-S-nonRS, T-nonS-nonRS, C-nonS-nonRS, PTTh-S-RS et PTTh-S-nonRS).

Le premier pas pour étudier les individus appartenant à ces classes a été de déterminer quelles ont été les réponses que chacun des individus avait données au reste de la séquence (cf. Section 8.2.4). Pour cela nous avons aussi inclus les individus qui n'ont pas répondu à la dernière question, nous reviendrons sur ces individus plus tard.

De ce fait, à travers une analyse en remontant de la dernière à la première question des séquences des individus, puis notamment à travers l'étude de leurs parcours, nous nous rapprochons de l'élaboration d'une réponse à notre deuxième question de recherche : **Peut-on identifier et différencier des interactions entre les plans cognitif et épistémologique**

de l'ETM personnel (ou approprié) des élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ? En effet, la description des parcours d'action à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique nous conduit nécessairement à la détermination d'une mise en relation entre ses composantes, et également à l'origine des genèses et à leur relations mutuelles.

Compte tenu de ce qui précède, la prégnance du discours portant sur les propriétés du produit des nombres complexes nous a permis de développer, tout au long de cette analyse, un intérêt particulier pour les parcours des individus appartenant à la classe initial « C » [3]. De ce fait, nous voudrions déterminer les possibilités d'établir des relations entre le pôle *propriétés de la multiplication des nombres complexes* et les éléments de réponse concernant les transformations : nous cherchons donc à identifier ces relations ainsi qu'à expliquer l'existence d'un groupe d'élèves qui ne concluent que sur les propriétés algébriques des nombres complexes sans mettre en relation ce résultat avec le travail géométrique effectué pendant la séance. Comment les propriétés de la multiplication des nombres complexes ont-elles influencé le travail des individus, notamment pour les questions portant sur les significations géométriques de la multiplication et sur les constructions ?

De la même manière nous nous intéressons à la détermination et à la comparaison de parcours associés aux autres classes (Proportionnalité et théorème de Thalès (PTTh) et Transformations (T)) afin d'identifier s'il existe un appui sur le figural au cours de la séance. Si oui, à quel moment et de quelle façon est-il présent ? Pour chaque cas nous voudrions déterminer l'influence exercée par notre signe-artefact sur la suite du processus d'élaboration des significations géométriques de la multiplication. Les liens et les différences entre les parcours des individus appartenant aux deux classes mentionnées ci-dessus nous semblent très intéressants car leurs réponses à la dernière question diffèrent au niveau de la genèse organisant l'Espace de Travail Mathématique personnel. Les individus associés à « PTTh » s'appuient d'avantage sur une genèse discursive (Propriété de Thalès) et ceux qui sont associés à « T » s'appuient plutôt sur un traitement figural du problème. Existe-t-il une correspondance entre les réponses des individus appartenant à une même classe ? Y a-t-il des différences entre leurs parcours ?

En outre, il serait intéressant de déterminer les possibilités d'établir des relations, en termes de représentativité, entre les réponses les plus fréquentes pour chacune des questions et la classification des individus en fonction de leurs réponses à la dernière question.

3. Cette classe correspond aux individus dont leurs réponses à la dernière question portent exclusivement sur les propriétés du produit des nombres complexes.

Nos questionnements ci-dessus nous amènent, d'une part, à traiter la manière dont s'organise chez les élèves l'articulation entre les deux plans épistémologique et cognitif de l'ETM et, d'autre part, à déterminer le type de genèse sémiotique à l'œuvre dans le travail mathématique des individus. Le premier pas méthodologique pour essayer d'y répondre a consisté en une réorganisation des réponses des élèves à toute la séquence dans des nouveaux tableaux (cf. Annexe H) où les individus ont été aussi associés à leur classe en fonction de leur réponse à la dernière question.

Il est très important de considérer et de souligner le fait que ces nouveaux tableaux présentés en annexe et ces nouvelles analyses qui seront développées par la suite font partie de notre méthodologie expérimentale d'analyse mixte concernant le traitement statistique d'une quantité réduite de données.

Dans un premier temps, l'analyse de ces nouveaux tableaux nous a permis d'en tirer quelques informations concernant des similarités et des différences entre les parcours des élèves et leur représentativité par rapport à la dernière classification initiale. Dans un deuxième temps, un croisement de ces résultats avec un nouveau traitement statistique des données nous a permis de conforter certaines de nos hypothèses et de nous focaliser sur des nouvelles pistes de réflexion.

Nous allons par la suite présenter l'analyse des réponses des individus à chacune des questions de la séquence en lien avec leur classe en fonction de leur réponse à la dernière question.

Lien entre les réponses des individus à chacune des questions de la séquence et leur classe en fonction des réponses à la dernière question

À partir de l'observation et de l'analyse des tableaux évoqués ci-dessus (cf. Annexe H), nous avons déterminé très peu de ressemblances entre les parcours des individus associés à une même classe, d'après la réponse donnée à la dernière question de la séquence. Par contre, même d'une façon limitée, nous pouvons identifier des éléments qui s'accordent entre eux dans certaines classes plus que dans d'autres. Ainsi, les classes T-nonS-nonRS et C-nonS-nonRS sont celles qui présentent le plus haut degré de similarité entre les parcours des élèves. Ceci a été établi en fonction de la fréquence des réponses données.

En ce qui concerne la présence des réponses déjà identifiées comme les plus fréquentes (cf. Section 8.2.4), nous n'avons que quelques références concernant leur degré de représentativité dans chacune des classes ci-dessus. Pour la question *4.b*, la réponse *1* a présenté une fréquence moins significative dans les classes PTTh-S-RS et T-nonS-nonRS. Ceci pourrait rendre compte du fait que se référer aux propriétés de la multiplication des nombres complexes dans la réponse à la dernière question peut être le résultat d'une influence locale de la réponse *1* donnée dans *4.b* plutôt que d'une synthèse implicite de la séance.

Pour la question *4.a*, la réponse *1* est la plus fréquente dans la plupart des classes, sauf dans T-S-nonRS. Pour la question *3.b*, la réponse *1* a été très peu ou presque pas évoquée dans les classes T-S-nonRS, T-nonS-nonRS, PTTh-S-RS et PTTh-S-nonRS. À partir de ces résultats, nous pourrions dire qu'il y a une concordance partielle entre la réponse donnée à la question *3.b* et la réponse donnée à la dernière question, lorsque que la réponse à la question *3.b* comporte comme éléments l'explicitation de la règle des signes et la position du produit en fonction de la position de facteurs. Il nous semble donc y avoir une certaine contradiction avec le fait qu'elle n'est significative ni dans PTTh-S-RS (car la règle des signes a été souvent prise en compte dans la réponse à la dernière question) ni dans T-S-nonRS ni dans T-nonS-nonRS (car les transformations ont été au cœur des réponses à la dernière question). Sur ce dernier point, précisons que les transformations n'ont pas nécessairement été associées aux références faites à la position du produit en fonction de la position des facteurs.

En observant avec attention les réponses à la question *3.a*, nous avons remarqué que la réponse *1* n'est pas présente du tout dans PTTh-S-nonRS. Nous pouvons seulement dire de ce résultat qu'il est plus en lien avec la difficulté des élèves à mettre en place la double relation du théorème de Thalès qu'avec une influence remarquable sur la suite des réponses données à la séquence.

Par ailleurs, un aspect qu'il nous semble très important de mentionner en dehors de l'étude de la représentativité des réponses fréquentes dans les différentes classes d'individus est le fait que nous avons trouvé une première réponse partielle à notre question portant sur les propriétés de la multiplication de nombres complexes et sur son influence sur le travail des individus face aux questions portant sur les significations géométriques de la multiplication et sur les constructions.

En fait, dans l'étude des réponses à la question *2.b*, nous observons que, dans la classe C-nonS-nonRS, les réponses *6* et *2* apparaissent avec la même fréquence. Cette deuxième réponse fait appel à la multiplication de Descartes, au théorème de Thalès ainsi qu'à la position du produit en fonction de la position des facteurs.

La mise à l'épreuve de cette observation dans le logiciel de statistique C.H.I.C., au sein duquel nous avons traité la totalité des réponses à la séquence, nous a permis de retrouver le fait que le pôle *propriétés de la multiplication de nombres complexes* reste isolé, comme nous l'observons dans un nouvel arbre de similarité portant sur les réponses à toute la séquence (cf. Annexe F). Par contre, nous avons remarqué une proximité intéressante entre les variables *règle des signes, la variation du produit en fonction de la position des facteurs (RS-VarP-Pf)* et *la configuration de Descartes, le théorème de Thalès dans la deuxième question et les transformations (cD-TTh-2-T)*. Ensuite, de la même manière que nous l'avions déjà établi dans les réponses à la question *2.b.*, *les propriétés de la multiplication des nombres complexes en langue naturelle (PMC-LN)* forment aussi, mais à un deuxième niveau, une classe de similarité avec les variables *RS-VarP-Pf* et *cD-TTh-2-T*.

Cela dit, nous ne pouvons pas dire de façon absolue que le discours associé aux propriétés de la multiplication des nombres complexes est en relation directe avec la genèse figurale associée à l'interprétation du théorème de Thalès en termes de transformations. Par contre, un autre aspect important est que ces propriétés n'ont pas été exprimées uniquement en langue naturelle. À ce sujet, nous obtenons une autre information grâce à l'arbre de similarités en question (cf. Annexe F) : les réponses à la dernière question associées aux propriétés de la multiplication des nombres complexes en langue naturelle (PMC-LN) ne font pas partie de la même classe de similarité que celles où ces propriétés ont été mentionnées en langage algébrique (PMC-LA) ; y aurait-il des différences à identifier entre les parcours des individus ayant exprimé ces propriétés différemment ?

Les premières réponses (PMC-LN) restent bien sûr associées, moins significativement, aux interprétations figurales des transformations comme celles qui ont été données dans les deuxième et troisième questions : des déplacements, des agrandissements et des réductions. Par contre, les réponses où ces propriétés ont été exprimées en langage algébrique (PMC-LA) restent plutôt associées au langage discursif exprimant ces propriétés dans les réponses aux questions *3* et *4*.

Une deuxième mise à l'épreuve de nos données dans le logiciel C.H.I.C. nous a permis d'analyser l'arbre cohésitif (cf. Annexe G) résultant de ce traitement. Ainsi, les informations obtenues nous ont encore donné des résultats qui correspondent à nos réflexions précédentes. Nous observons que deux classes de hiérarchie différente se sont créées dans le premier niveau : elles montrent, d'une part, que PMC-LA implique SA-MNu et, d'autre part, que RS-Varp-Pf implique PMC-LN. Nous sommes conscients du fait qu'il y a d'autres implications avec une intensité plus forte mais nous avons choisi d'étudier en profondeur ces quatre variables, étant donnée leur importance dans la mise en relation entre la genèse figurale et la genèse discursive associées à la représentation géométrique de la multiplication des nombres complexes.

Comme nous le savons déjà, une particularité de l'arbre cohésitif (cf. Annexe G) est le fait d'arrêter le processus de construction de classes « dès que la cohésion entre variables devient trop faible » (Couturier, 2000, p.5). L'isolement de nos variables serait-il donc une preuve que les élèves qui n'ont répondu à la dernière question qu'en faisant appel aux propriétés des nombres complexes n'ont pas vraiment réussi à intégrer les différents éléments travaillés au cours de la séance et qu'ils n'ont donc pas eu accès à la signification géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?

Notre questionnement ci-dessus nous amène à vérifier de plus près la véracité et le degré de confiance des informations statistiquement obtenues. Nous nous demandons donc : y aurait-il effectivement des parcours spécifiques — c'est-à-dire des comportements différentiables pour chacune des classes — qui nous permettraient non seulement d'identifier l'émergence de genèses sémiotiques mais aussi le chemin suivi pour favoriser des interactions entre les différents plans de l'Espace de Travail Mathématique ? Il ne nous est pas possible d'obtenir de réponse à cette question si nous restons dans une analyse ne portant que sur les contenus mathématiques en jeu. Nous devons donc travailler en fonction des interactions entre les composantes de chaque question de même que sur les entrées dans l'Espace de Travail Mathématique.

Par la suite, ayant déjà une vision globale mais encore très abstraite des réponses des élèves, nous allons étudier le comportement de nos variables à l'intérieur de six parcours d'individus :

- deux d'entre eux appartenant à la classe C-nonS-nonRS. Nous faisons ce choix en nous appuyant sur les observations, hypothèses et réflexions portant sur les implications que nous avons déjà décrites en annexe (cf. Annexe H) et qu'il nous semble très intéressant de développer d'un point de vue empirique ;
- deux autres individus appartenant à deux classes différentes, PTTh-S-RS et T-S-RS, car l'étude comparative de parcours qui, dans leur dernière réponse, font une synthèse de la séance et se réfèrent à la règle des signes nous paraît pertinente (cf. Section 8.2.3) ;
- deux autres individus n'ayant pas répondu à la dernière question.

Analyse comparative de deux individus associés à la classe C-nonS-nonRS en fonction de leur réponse à la dernière question de la séquence

Individus : C1-I5 et C2-I7

Le choix de ces deux individus associés à la même classe en fonction de leur réponse à la dernière question trouve son importance dans le fait que leur façon de s'exprimer vis-à-vis de la multiplication des nombres complexes diffère dans le formalisme. Cette découverte, grâce à l'observation et à l'analyse des données statistiques, nous a permis d'identifier un point clé pour commencer l'étude des parcours des individus en nous donnant un critère qui sera le point de départ de cette analyse : la mise en relation des genèses discursives portant sur les propriétés mathématiques — référence théorique pour l'interprétation des énoncés, preuve et construction — et les genèses sémiotiques qui sont le cœur de la relation entre les différents plans de l'Espace de Travail Mathématique et que notre séquence visait à faire émerger ou à identifier.

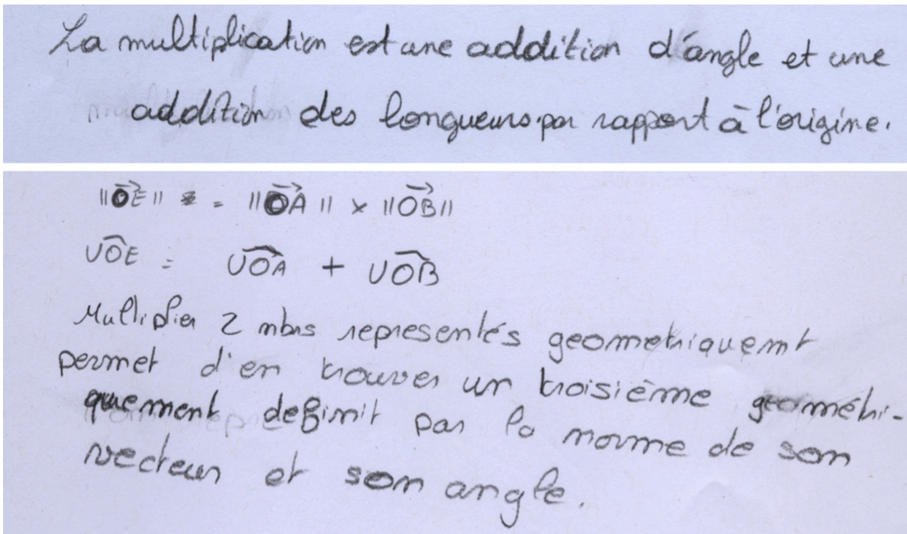
Nous allons donc observer, à travers le critère mentionné ci-dessus, des différences et des ressemblances entre les procédures effectuées par les individus appartenant à une même classe. En outre, cette analyse suivra bien sûr les considérations théoriques déjà mentionnées dans la section 5.1.2 : « dans l'analyse de l'Espace de Travail Mathématique, nous allons étudier les genèses épistémologiques et cognitives (Kuzniak, 2012) que nous pouvons identifier grâce aux traces écrites des élèves. Nous verrons aussi la possibilité d'étudier comment le signe-artefact moteur de nos activités a été mis en œuvre tout au long de la séquence. [...] Des croisements entre les *a priori* de la séquence (cf. Section 8.1) et les réponses effectives des élèves seront bien sûr incluses. »

Pour commencer, nous présentons deux réponses à la dernière question de la séquence : la première rend compte, en langue naturelle, des propriétés de la multiplication des nombres complexes (en changeant multiplication de modules par addition de longueurs) et la deuxième fait référence à ces propriétés dans un langage algébrique en termes de multiplication de normes de vecteurs et d'addition d'angles. Ces deux individus ne font aucune allusion au reste de la séance et leur réponse ne fait apparaître aucune mise en relation avec les éléments figuraux présents dans l'activité.

Le tableau ci-dessous nous permet d'identifier les concordances et les différences vis-à-vis des contenus mobilisés par chaque individu (cf. Section 8.2.4) pour répondre à chacune des questions de la séquence.

-	**C-nonS-nonRS**					
Gr	**4.b**	**4.a**	**3.b**	**3.a**	**2.b**	**1**
C2-I7	1	1	5	2	2	1
C1-I4	3	4	1	2	2	1

Par exemple, dans la recherche d'une relation entre les variables RS-Varp-Pf et PMC-LN (cf. Annexe H), nous attendions des différences notamment dans les questions *3* et *2*, par


La multiplication est une addition d'angle et une addition des longueurs par rapport à l'origine.

$\|\vec{OE}\| = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\|$

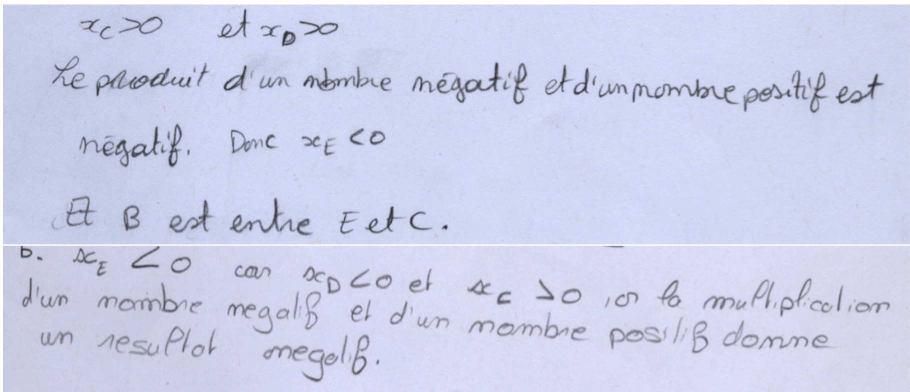
$\widehat{UOE} = \widehat{UOA} + \widehat{UOB}$

Multiplier 2 nbrs representés geometriquement permet d'en trouver un troisième geometriquement definit par la norme de son vecteur et son angle.

Figure 8.13 – Réponse 5 pour C1-I4 en haut et C2-I7 en bas

contre, nous pouvons observer qu'ils ont donné le même type de réponse à la question *2.b* sans faire référence à la position du produit.

Néanmoins, dans la question *3.b*, c'est-à-dire au moment de généraliser la signification géométrique de la multiplication d'un nombre positif par un nombre négatif, une petite différence rend compte des implications découvertes grâce aux données extraites de l'arbre cohésitif.


$x_C > 0$ et $x_D > 0$

Le produit d'un nombre négatif et d'un nombre positif est négatif. Donc $x_E < 0$

Et B est entre E et C.

b. $x_E < 0$ car $x_D < 0$ et $x_C > 0$ car la multiplication d'un nombre negatif et d'un nombre positif donne un resultat negatif.

Figure 8.14 – Réponse 3.b pour C1-I4 en haut et C2-I7 en bas

La différence entre les deux réponses est bien la référence à la position du point B, ce que nous pourrions aussi interpréter comme une référence à la position du point E, le produit. La présence de cette variable impliquerait donc une expression des propriétés de la multiplication des nombres complexes en langue naturelle. Mais quelle signification donne cette implication aux enjeux produits entre le registre discursif et la genèse figurale ? Dans lequel des exemples choisis une dernière réponse ne faisant référence qu'à la multiplication des nombres complexes nous permettra d'identifier une concordance dans son parcours, rendant compte de la compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?

Comme nous l'avons déjà dit dans notre méthodologie et dans la présentation de nos cadres théoriques, une entrée traditionnelle à l'ETM aura son point de départ dans le plan de composantes, appelé aujourd'hui le plan épistémologique. Cette entrée correspond bien au point de départ le plus approprié pour aborder un problème géométrique typique où la figure et l'énoncé feraient appel aux propriétés mathématiques permettant de donner la bonne réponse. Par contre, quand les relations établies entre les composantes de l'énoncé et les représentations géométriques demandent un processus de recherche non traditionnel, c'est le plan cognitif qui va organiser l'Espace de Travail Mathématique (cf. Section 4.3.2).

Compte tenu de ce qui précède, dans une séance conçue pour *activer*, dans un Espace de Travail Mathématique, des interactions entre les plans cognitif et épistémologique pour que des significations géométriques de la multiplication puissent émerger du travail des individus, il nous semble important d'observer un moment clé : la construction géométrique de la multiplication des nombres complexes.

Ainsi, lorsqu'on examine les productions de ces individus sur les questions antérieures, on constate un travail de construction très précis avec les mesures effectuées sur les figures. Le groupe C2-I7 s'appuie sur sa construction et sur l'usage des normes comme des longueurs. Il reste attaché à ses connaissances théoriques antérieures à la séance, qu'il se contente d'utiliser sans mettre en relation son travail avec le but recherché, et ne s'appuie que de manière superficielle sur la situation donnée en classe. Quant au second individu, il ne parvient pas à faire la construction du produit des mesures pour le produit des affixes et effectue une addition.

Plus précisément, le fait de rester rattachés aux connaissances *théoriquement* préalables avec quelques influences du travail fait pendant la séance peut expliquer la procédure de réponse de C2-I7 : la multiplication des normes sur l'unité peut être influencée par la multiplication de Descartes (justifiée par le théorème de Thalès) et les tracés perpendiculaires supposent sans doute qu'il *fallait* suivre les indications qui orientaient le travail dans la question précédente.

Une mesure en centimètres a été faite, étant donné qu'il n'y a pas de coordonnées à multiplier. Puis une bonne relation entre unité et centimètres ainsi que l'addition des angles ont

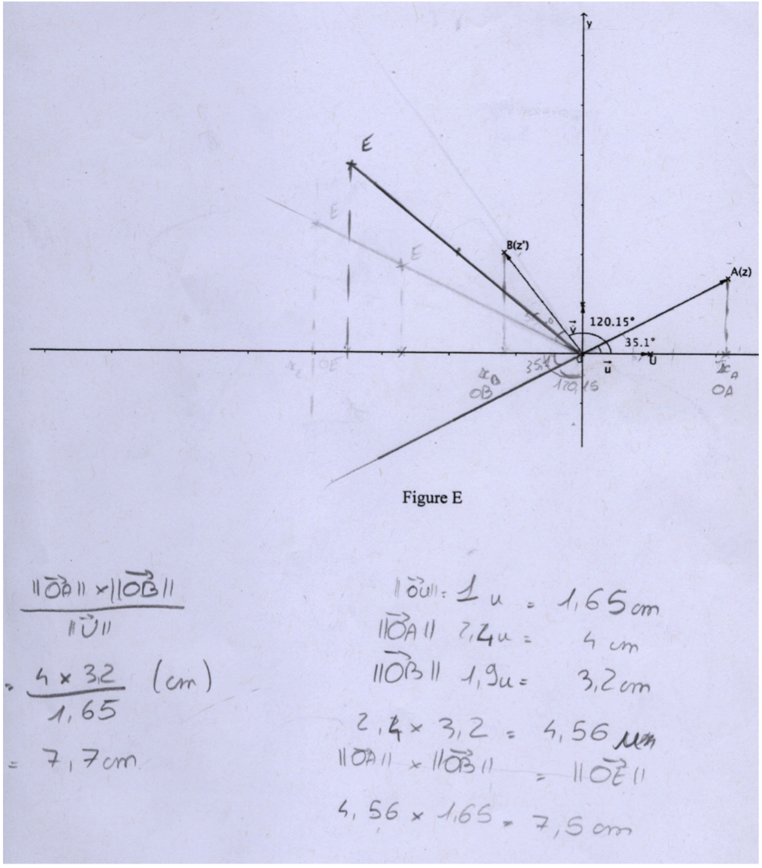


Figure 8.15 – Réponse 4.b pour C2-I7

permis de calculer la position du produit. On peut penser qu'il n'y a pas d'influences discursives formelles par rapport à la multiplication des nombres complexes outre les propriétés apprises, de même qu'il n'y a pas une profonde réflexion sur le travail développé au cours de la séance : les élèves ont cru comprendre ce qu'il fallait faire, ils ont fait appel aux propriétés apprises et ils ont finalement répondu en oubliant ce qui avait été formellement appris sur l'usage de certains outils de construction géométrique à ce niveau de l'enseignement. Ceci a bien pu être une contrainte sous-jacente à l'aspect non traditionnel de la séance.

Quant à la représentation géométrique de la multiplication de C1-I4, nous observons qu'elle présente des différences et des ressemblances avec celle de C2-I7 : parmi les similarités, nous pouvons mentionner la présence des projetés orthogonaux et les tracés de mesures.

Des erreurs dans le calcul sont aussi observables car la multiplication exprimée algébriquement est devenue addition dans le passage au numérique, ce qui explique l'erreur de formu-

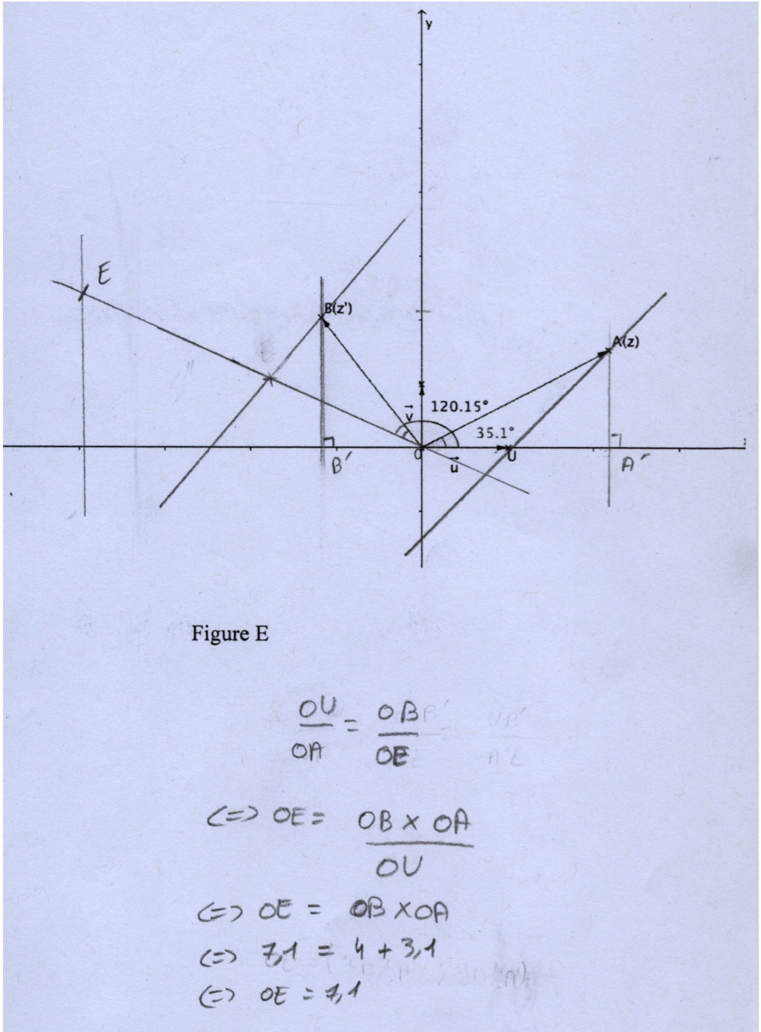


Figure 8.16 – Réponse 4.b pour C1-I4

lation dans la réponse à la dernière question. Par contre, nous nous intéressons à ce qui est observable mais pas tout à fait explicable dans la construction du produit : deux triangles et deux droites, qui semblent être des droites parallèles. Ces éléments, seraient-ils l'indice d'une influence du signe-artefact qui commence à devenir signe mathématique et notamment un représentant de la multiplication en géométrie ? Et de quelle relation entre multiplication et transformation cette influence rend-elle compte ? En restant dans l'analyse de l'écrit, ces questions ne peuvent que donner lieu à des hypothèses.

Les conclusions élaborées dans la synthèse de chacun de ces individus semblent s'appuyer sur une genèse instrumentale privilégiant la construction qui vient même faire obstacle à la genèse discursive articulée avec la visualisation. De ce fait, il n'y a pas d'enrichissement des propriétés et du raisonnement argumentatif purement déductif. Les élèves ont donné une solution qui est bien de type constructif et permet de réaliser le produit de deux nombres complexes dans le plan avec le défaut de la construction des projetés orthogonaux. Une possible influence du signe-artefact — la représentation de la multiplication correspondant à l'icône du théorème de Thalès — a probablement été aussi présente.

Tableau-synthèse de l'analyse

Variable	**Résultat de l'analyse**
Entrée dans l'ETM	Épistémologique. Les propriétés apprises avant la séance ont été mises en œuvre sans enrichissement visible du raisonnement argumentatif.
Genèse sémiotique/des enjeux entre différents registres de représentation	Des enjeux limités à l'application des propriétés de la multiplication des nombres complexes permettant la construction du produit. Ceci dans un processus mécanique ou inconscient ne permettant pas l'établissement d'un lien entre la représentation résultant de la construction et des transformations géométriques associées à la multiplication.
Médiation sémiotique du signe-artefact	La construction faite par l'un des deux individus (C1-I4) nous a donné des traces d'une influence de notre signe-artefact ; néanmoins, cette influence ne peut rester qu'hypothétique.
Signification géométrique de la multiplication	Pas d'intervention de métaphores. Il n'y a pas de mise en évidence d'une interprétation de la multiplication comme une transformation dans le plan.

Analyse comparative de deux individus associés aux classes PTTh-S-RS et T-S-RS

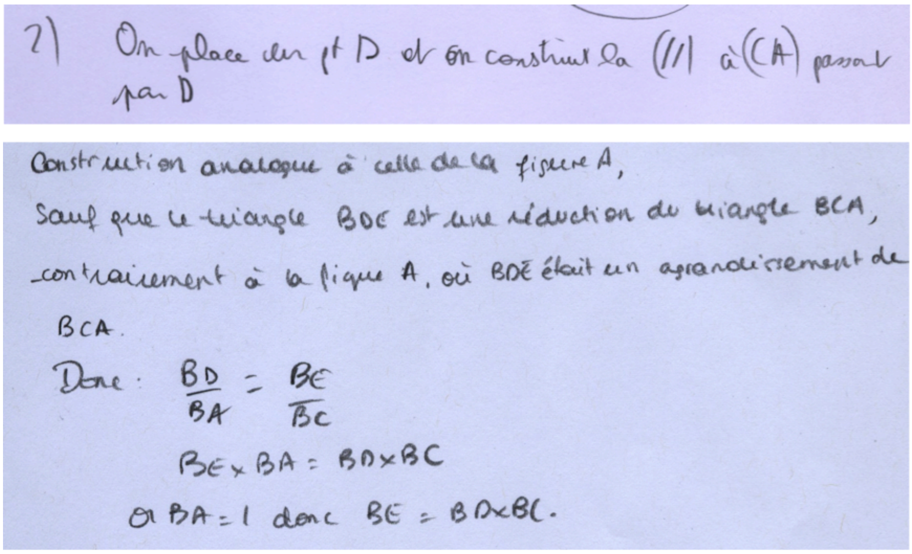
Le tableau comparatif portant sur les contenus mobilisés pour répondre à chacune des questions nous permet de constater que deux des réponses que nous étudions principalement pour l'analyse des séquences (dans ce cas, les réponses aux questions *2.b* et *3.b*) ne partagent pas les mêmes éléments de réponse.

-	PTTh-S-RS (en haut) et T-S-RS (en bas)					
Gr	**4.b**	**4.a**	**3.b**	**3.a**	**2.b**	**1**
C3-I1	1	1	5	2	2	1
C1-I9	1	1	3	1	5	1

Comme nous le verrons dans la figure 8.17, seul l'individu C1-9, appartenant à la classe T-S-RS (transformations, synthèse et règle de signes), parle déjà des transformations dans sa réponse à l'une des premières questions de la séquence, c'est-à-dire à la question *2.b*.

Ce qui est très intéressant dans l'analyse de cette réponse est le fait de parler d'une réduction et d'un agrandissement du triangle BCA. De ce fait, la relation de proportionnalité sous-jacente au théorème de Thalès ainsi qu'à la représentation géométrique de la multiplication de Descartes n'a pas été traitée en fonction des segments-facteurs et du segment-produit représentant la proportionnalité. Soit elle a été *transposée à la visualisation de triangles semblables*, c'est-à-dire l'entrée épistémologique dans l'ETM par le théorème de Thalès, et a produit une genèse sémiotique vers le plan cognitif permettant la visualisation des triangles semblables réduits ou agrandis selon la nature du facteur BD opérant sur BC, soit cette relation a été *induite par la visualisation de triangles semblables*, c'est-à-dire que l'entrée cognitive dans l'ETM a permis de visualiser la transformation d'une figure en termes d'agrandissement ou de réduction et de l'interpréter, grâce au référentiel théorique disponible, comme le résultat d'une relation multiplicative inhérente, dans ce cas, au théorème de Thalès.

Si nous revenons à la dernière question et regardons plus en détail les éléments de réponse donnés par le même individu (C1-9), nous observons qu'il a établi un lien, dès qu'un repère intervient, entre la multiplication et des éléments de la règle des signes. Puis, il a élargi cette relation à la multiplication de Descartes ainsi qu'à toute multiplication où interviennent des facteurs de *toute nature*. Par contre, le jeu de cadre qui apparaît autour de la règle des signes mérite d'être retravaillé dans le sens où nous ne pouvons pas accepter une mise en relation entre la règle des signes et la généralisation géométrique que l'élève est en train d'évoquer.



2) On place un pt D et on construit la (//) à (CA) passant par D

Construction analogue à celle de la figure A,
Sauf que le triangle BDE est une réduction du triangle BCA,
contrairement à la figure A, où BDE était un agrandissement de
BCA.

Donc : $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$

$BE \times BA = BD \times BC$

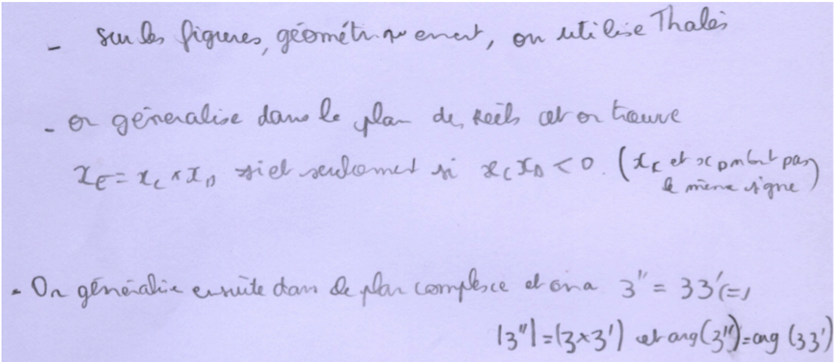
Or $BA = 1$ donc $BE = BD \times BC$.

Figure 8.17 – Réponse à la question 2.b pour C3-I1 en haut et C1-I9 en bas

En outre, le fait d'associer l'existence d'un angle nul au produit où seules les normes entrent en jeu nous permet d'interpréter que l'individu a aussi situé la configuration de la multiplication de Descartes dans un plan affine, ce que vient rendre compte de la mise en relation de notre signe-artefact, des propriétés le constituant et de sa signification culturelle et personnelle avec les propriétés de la multiplication des nombres complexes ; propriétés qui permettent, comme nous le savons déjà, de rendre compte de la signification géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

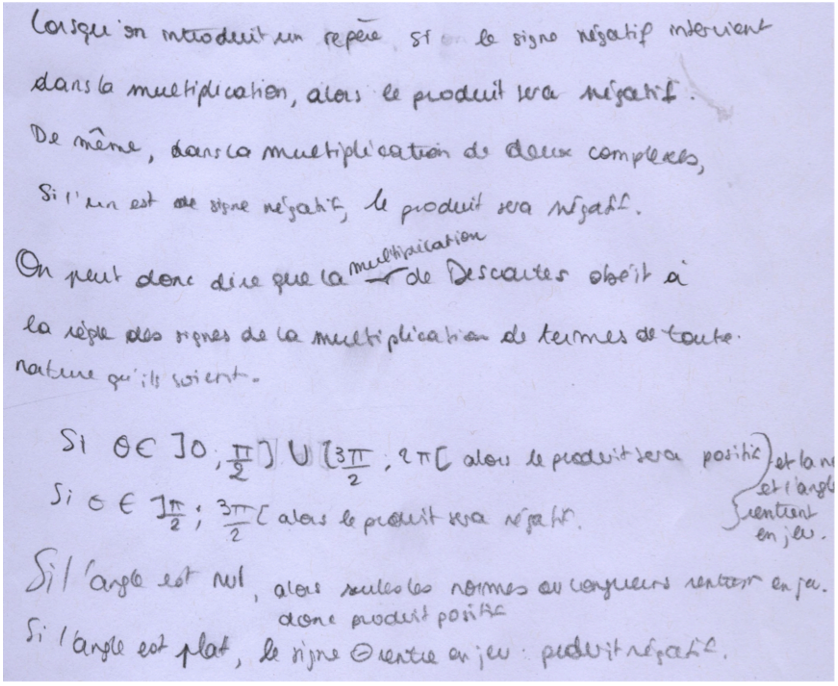
L'individu C3-1 (PTTh) rend compte dans sa synthèse des différents moments de la séance en intégrant l'un dans l'autre : il a donné une interprétation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres (réels et complexes) en généralisant dans le plan complexe. Peut-on dire que le mot *généralisation* rend clairement compte d'une mise en relation entre les différents moments de la séance ? D'une certaine manière, oui, puisqu'il s'agissait d'étendre les ensembles de nombres, mais, d'un point de vue géométrique, les règles en jeu étant différentes, la réponse est moins claire.

Nous dirions donc qu'il y a réussite pour les deux individus en question. Les réponses des deux rendent compte de leur engagement au travail tout au long de la séance ; par contre, l'un d'entre eux a pu mettre en œuvre les processus cognitifs pertinents lui permettant de faire interagir les genèses figurale et discursive en intégrant clairement les différents éléments de son Espace de Travail Mathématique personnel tandis que l'autre n'a pas intégré explicitement


- sur les figures, géométriquement, on utilise Thalès

- on généralise dans le plan des réels et on trouve
$x_E = x_C \times x_D$ si et seulement si $x_C x_D < 0$. (x_C et x_D ont pas le même signe)

- On généralise ensuite dans le plan complexe et on a $3'' = 33'$ (=)
$|3''| = |3 \times 3'|$ et $\arg(3'') = \arg(33')$


Lorsqu'on introduit un repère si le signe négatif intervient dans la multiplication, alors le produit sera négatif.
De même, dans la multiplication de deux complexes, si l'un est de signe négatif, le produit sera négatif.
On peut donc dire que la multiplication de Descartes obéit à la règle des signes de la multiplication de termes de toute nature qu'ils soient.

Si $\theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2} ; 2\pi[$ alors le produit sera positif
Si $\theta \in]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}[$ alors le produit sera négatif.
et la n... et l'angle rentrent en jeu.
Si l'angle est nul, alors seules les normes ou longueurs rentrent en jeu.
donc produit positif
Si l'angle est plat, le signe ⊖ rentre en jeu : produit négatif.

Figure 8.18 – Dernière réponse C3-I1 en haut et C1-I9 en bas

les propriétés sous-jacentes au théorème de Thalès aux propriétés de la multiplication des nombres complexes.

La richesse de l'ETM proposé ainsi que la richesse et la diversité de l'ETM personnel approprié par chaque individu nous amènent à réfléchir sur l'importance d'intégrer explicitement à l'ETM le rôle de l'enseignant comme guide du processus d'apprentissage-enseignement. Le besoin d'une médiation plus active de l'enseignant et l'orientation d'un processus d'institutionnalisation des connaissances traitées pendant la séance nous semble indispensable.

Nous avions explicité dans notre analyse *a priori* le fait de ne pas inclure des interventions plus fortes de l'enseignant dans la séance expérimentale en classe de Terminale S. Ceci puisque notre principal intérêt était d'étudier comment les élèves allaient s'approprier un espace de travail mathématique conçu pour qu'ils puissent intégrer certaines connaissances anciennes à une nouvelle situation ; situation à travers laquelle, à la différence de celle mise en place en classe de Quatrième, nous ne sommes pas en train de construire une nouvelle connaissance mais de réinvestir une connaissance acquise à travers un processus où nous attendions la reconnaissance de ses significations en géométrie. Néanmoins, la complexité de la tâche demandée nous a conduits à établir ce besoin de la médiation de l'enseignant même dans la poursuite des objectifs propres à la situation proposée en classe de Terminale S.

Nous allons renforcer cette idée en étudiant les réponses à la question *3.b*.

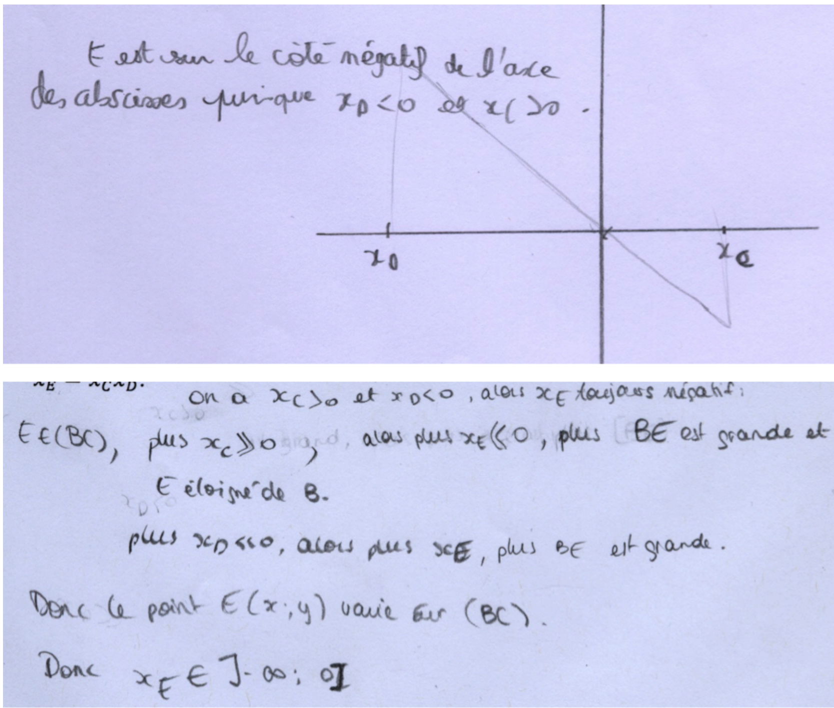


Figure 8.19 – Réponse à la question 3.b pour C3-I1 en haut et C1-I9 en bas

Dans cette réponse, l'individu C3-I1 généralise la signification géométrique de la multiplication entre un nombre positif et un nombre négatif à travers la règle des signes et la représentation géométrique correspondant à une *configuration de papillon* du théorème de Thalès. Mais cette richesse dans son travail — c'est-à-dire le fait de pouvoir représenter un même objet mathématique dans des registres de représentations sémiotiques différents — n'a pas abouti, en termes de signification géométrique du produit en question, au discours représentationnel dont, même sans une représentation géométrique, l'individu C1-I9 a su rendre compte : la position et la valeur du produit varient selon la valeur et la nature des facteurs.

Pour terminer l'analyse de ces deux séquences, nous allons rendre compte d'un dernier aspect qui met les deux individus dans une situation de besoin de médiation.

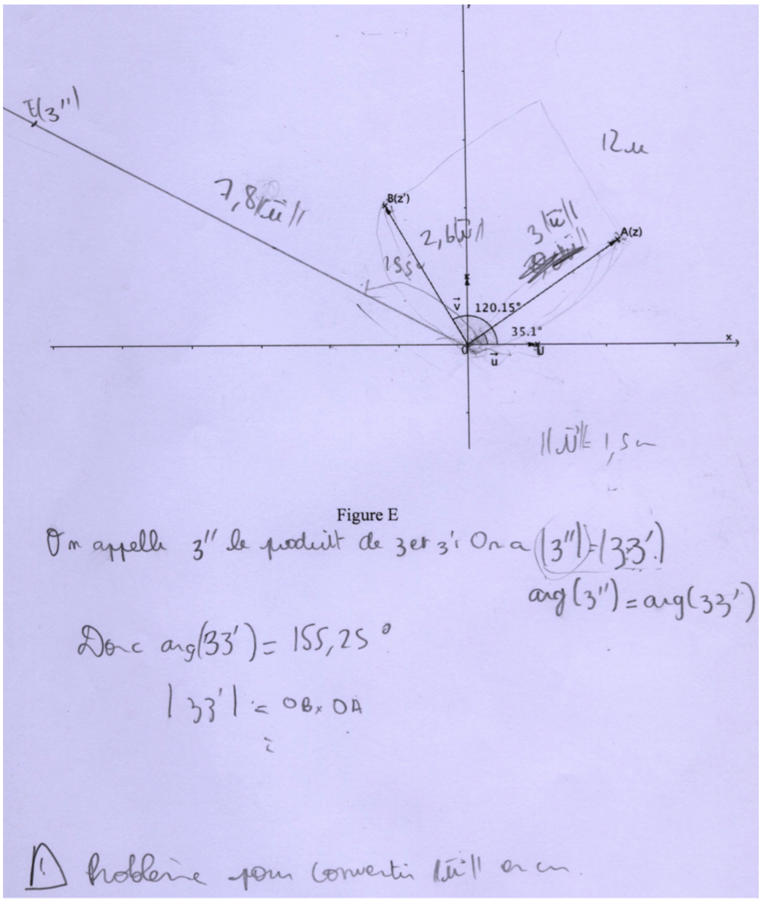


Figure 8.20 – Réponse à la question 4.b pour C3-I1

Plutôt que de décrire ce qui est évident dans chacune des constructions, nous mentionnons le fait qu'aucune construction géométrique du produit de deux nombres complexes n'a rendu compte d'une intégration des enjeux entre la multiplication pour différents ensembles de nombres et la géométrie mise en œuvre tout au long de la séance : il apparaît clairement que les connaissances algébriques sur les nombres complexes ont guidé la construction géométrique qui ne s'appuie par sur les autres constructions faites pendant la séance. En d'autres termes, le référentiel théorique déjà connu et associé aux propriétés de la multiplication des nombres complexes a orienté la prise en main des instruments par les individus, pour les conduire à une construction juste mais presque isolée du travail de la séance. Dans ces réponses, nous n'avons aucun élément qui nous permette de rendre compte d'une façon explicite de la visualisation et de la compréhension géométriques de la multiplication des nombres complexes comme une transformation dans le plan. L'entrée dans l'ETM pour cette question est donc épistémologique, ayant pour résultat une *construction à la règle graduée*, si l'on peut l'appeler comme ça, qui permet de visualiser dans le plan le placement du produit de la multiplication de deux nombres complexes.

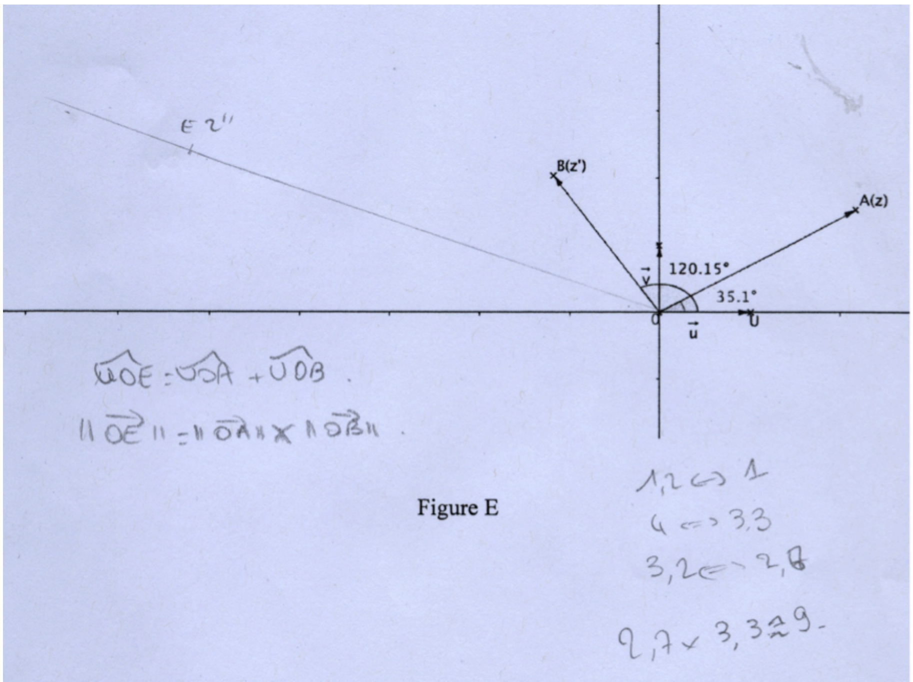


Figure 8.21 – Réponse à la question 4.b pour C1-I9

Tableau-synthèse de l'analyse

Variable	Résultat de l'analyse
Entrée dans l'ETM	Mixte mais globalement épistémologique.
Genèse sémiotique/des enjeux entre différents registres de représentation	Genèse sémiotique d'origine ambiguë surtout dans la réponse donnée par C1-I9 à la deuxième question. Une genèse sémiotique d'origine cognitive a pu se produire grâce à la visualisation de triangles semblables, suivie de la visualisation d'une transformation (réduction-agrandissement) de ces triangles par l'effet de la multiplication. Cette transformation a été interprétée et justifiée grâce au produit inhérent à la configuration du théorème de Thalès. Par ailleurs, un enjeu significatif entre différents registres de représentation existe lors de la mise en relation entre la règle des signes et la représentation du produit d'un nombre positif par un nombre négatif dans le plan affine (C3-I1).
Médiation sémiotique du signe-artefact	L'action et l'évolution du signe-artefact ont été identifiées grâce à l'explicitation de l'existence d'un angle nul dans le produit de Descartes (lequel a été nécessairement transposé dans le plan affine). De ce fait, une mise en relation a été produite entre les propriétés de l'icône du théorème de Thalès et les propriétés de la multiplication de nombres complexes.
Signification géométrique de la multiplication	Hypothétiquement, le produit a été interprété comme résultant d'une transformation dans le plan. Ceci grâce à l'interprétation de la règle des signes en termes d'angles et par la généralisation de la signification de tout produit au produit de deux nombres complexes. Néanmoins, les transformations n'ont pas été identifiables dans la construction du produit de deux nombres complexes.

Analyse comparative de deux individus n'ayant pas répondu à la dernière question

-	SR-A (en haut) et SR-B (en bas)					
Gr	**4.b**	**4.a**	**3.b**	**3.a**	**2.b**	**1**
C1-I13	7	2	1	7	6	1
C1-I14	7	6	4	1⋆	6	1

Les réponses de ces deux individus ont rarement concordé avec les réponses que nous avons déterminées comme étant les plus fréquentes de la séquence ; elles n'ont coïncidé que dans les deux premières questions. L'individu C1-I14 n'a pas répondu à la question *3.b*. Nous savons déjà que certaines réponses sont bien significatives et que leur analyse nous a permis dans les parcours précédents de mieux comprendre, dans certains cas, ce qui se passe dans les réponses aux deux dernières questions. Ceci est le cas des réponses aux questions *2.b* et *3*.

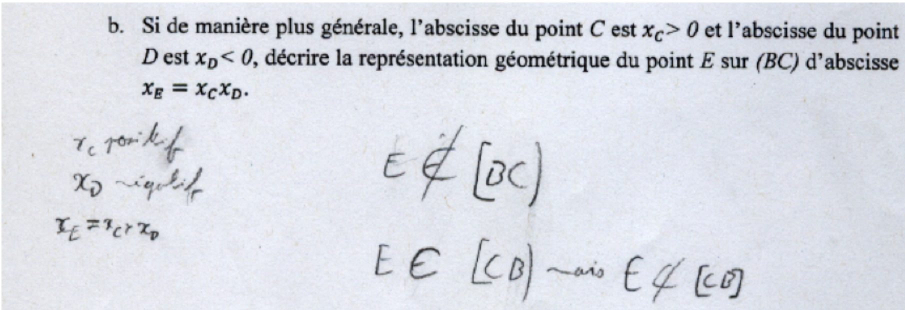


Figure 8.22 – Réponse à la question 3.b pour C1-I13

Dans les réponses à la question *3*, nous avons remarqué que l'individu *A* a donné une réponse en faisant référence à la position du produit en fonction de la nature (nombre entier négatif) d'un des facteurs. Cette réponse correspond bien à une des réponses significatives qui pourraient intervenir dans les réponses aux autres questions de la séquence, comme nous l'avons déjà vu avec les autres parcours. L'individu *B* a développé sa réponse au brouillon en suivant la consigne des projetés orthogonaux et la technique *suggérée* de deux applications du théorème de Thalès. Par contre, il n'a pas rédigé une réponse pour cette question.

D'après ce que nous observons dans les réponses à la question *4.a*, les deux individus rendent compte des propriétés géométriques de la multiplication des nombres complexes, qu'ils les aient déduites de la correspondance de la configuration géométrique donnée avec les produits représentés précédemment ou qu'ils les connussent avant la mise en place de notre séance expérimentale. Le fait de donner une importance à ces considérations théoriques a à voir avec le fait que ces réponses auraient pu, d'une certaine manière, influencer le discours

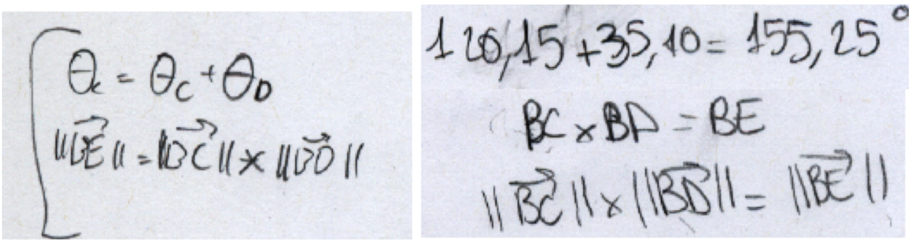


Figure 8.23 – Réponse à la question 4.a pour C1-I13 à gauche et C1-I14 à droite

théorique permettant de donner une réponse à la question *4.b*. La connaissance de ces propriétés pourrait facilement permettre la mise en place d'une *technique* qui amènerait les élèves à la construction du produit de deux nombres complexes la plus répandue parmi les réponses des élèves. Ladite construction, à partir de la connaissance des propriétés en langage algébrique, pourrait rendre compte de la possibilité des élèves de représenter le produit complexe dans un autre registre de représentation. Comme nous l'avons déjà vu dans certains des parcours étudiés précédemment, la puissance du discours théorique a conditionné les réponses des élèves sans leur permettre d'agir en fonction de ce qui était attendu : la prise en compte du travail réalisé pendant la séance, notamment la reconnaissance de l'icône du théorème de Thalès comme une représentation de la multiplication portant sur des significations géométriques concernant des transformations.

De ce fait, la possibilité de représenter un même objet mathématique dans différents registres de représentation ne rend pas nécessairement compte de la compréhension du sens de cet objet mathématique. Voici donc la complexité cognitive à prendre en compte lorsque nous proposons des activités où des processus de conversion doivent être mis en place par les élèves : il faut prendre en compte que le seul fait de changer de registre de représentation sémiotique n'implique pas la réification d'un objet mathématique.

À cette étape de l'étude des parcours des élèves n'ayant pas répondu à la dernière question, présentons les réponses que ces deux individus ont, à notre surprise, données à la question *4.b* de la séquence, où il fallait construire le produit de deux nombres complexes.

Dans la réponse donnée par C1-I13, les mesures et le calcul prenant en compte l'unité nous font penser que la construction réalisée répond bien au discours théorique portant sur la multiplication de modules, ceci faisant partie des connaissances préalables ou bien, comme nous l'avons déjà dit, étant déduit de la justification par le théorème de Thalès donnée tout au long de la séquence. Par contre, même avec quelques défauts liés aux mesures des longueurs, une construction tout à fait correcte du point de vue de sa correspondance *morphologique* avec la

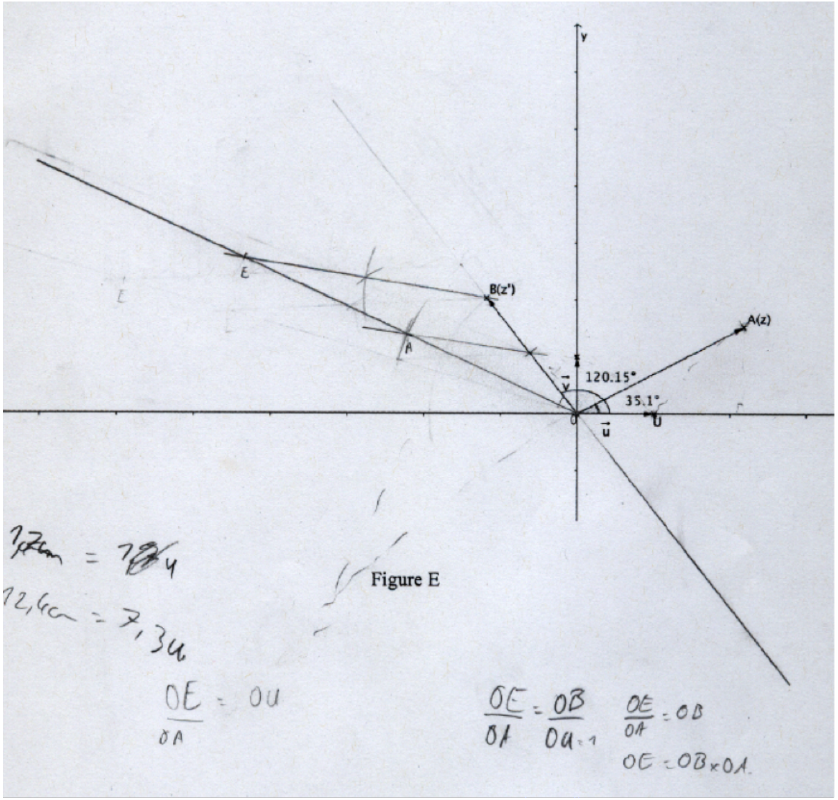


Figure 8.24 – Réponse à la question 4.b pour C1-I13

représentation géométrique du produit de Descartes et le bon placement des points U, A et E respectifs résultant d'une similitude rendent compte d'une compréhension de la signification géométrique du produit : le passage de la compréhension du produit de Descartes, ayant un angle nul, au produit complexe où la puissance du théorème de Thalès permet encore de prouver le produit en ajoutant la rotation des angles à la multiplication de *longueurs*.

De la même manière, la réponse de C1-I14 rend bien compte de la possible non considération du discours théorique concernant les propriétés géométriques de la multiplication des nombres complexes : sa construction montre une interprétation du produit de Descartes en termes de triangles semblables. Cette considération peut provenir du fait que la configuration de Descartes ait pu être interprétée comme étant composée de deux triangles semblables, lesquels résulteraient d'un agrandissement pour la première question et d'une réduction pour la deuxième. Dans ce cas, l'agrandissement résultant de l'homothétie s'accompagne aussi d'une rotation, qu'on peut identifier par la correspondance des angles.

Finalement, étant donné qu'il n'y pas d'autres traces écrites ou orales qui nous permettent

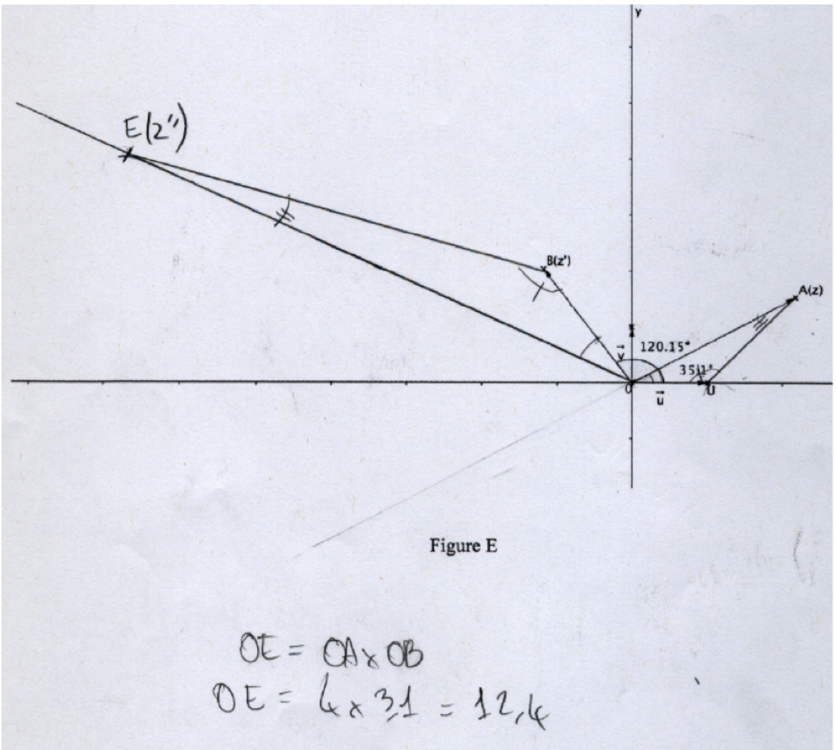


Figure 8.25 – Réponse à la question 4.b pour C1-I14

d'accéder plus finement au travail fait par cet individu, il ne nous reste que des conjectures à faire quant aux motivations favorisant des réponses comme celles mentionnées ci-dessus. Il aurait sans doute été très intéressant de connaître la façon avec laquelle ces individus en particulier auraient pu s'exprimer dans une réponse à la dernière question de la séquence.

Nous remarquons finalement que nos résultats sont toujours ambigus et que nos données manquent de paroles qui nous permettent vraiment de les interpréter comme des faits. Dans ce cas, nous aurions vraiment une preuve tangible de l'effet ou de l'influence provoqués par notre signe-artefact. Néanmoins, ces résultats sont loin d'être insignifiants.

Par ailleurs, la recherche de parcours en fonction de réponses ou de non-réponses à la dernière question de la séquence a orienté l'analyse des données et, comme nous l'avons déjà montré, des différences et des ressemblances ont bien été mises en évidence. Il nous faut cependant des informations complémentaires pour approfondir nos analyses. Nous reviendrons sur cet aspect dans nos conclusions.

Par la suite, nous allons nous diriger vers l'analyse d'un extrait de cette séance expérimentale. Cette analyse aura lieu là où les interactions entre les élèves deviennent visibles, même si cela ne veut pas nécessairement dire qu'elles soient plus facilement interprétables. Nous allons donc analyser un extrait de vidéo d'une de nos classes de Terminale S.

Tableau-synthèse de l'analyse

Variable	**Résultat de l'analyse**
Entrée dans l'ETM	Mixte. Les entrées cognitives n'étant qu'hypothétiques sont bien probables.
Genèse sémiotique/des enjeux entre différents registres de représentation	Une genèse sémiotique a pu permettre le passage de l'expression algébrique des propriétés du produit de deux nombres complexes à la construction du produit ; nous dirions que c'est une genèse d'origine épistémologique. Néanmoins et compte tenu des constructions faites pour répondre à la question *4.b*, cette genèse a pu avoir son origine dans le plan cognitif : les propriétés du produit de nombres complexes ont été interprétées en termes de transformations. Cela amène l'individu à mettre en œuvre une genèse instrumentale qui permettra la construction de deux triangles semblables. En d'autres termes, l'individu reconnaît la somme d'angles et le produit des normes comme la transformation d'un triangle en un triangle qui lui est semblable. Cette transformation peut prendre en compte la rotation ou non d'un des facteurs en respectant le placement indiqué par la somme d'angles et le produit de normes. La genèse sémiotique ayant pour origine le plan cognitif de l'ETM est aussi reconnue comme le produit de la médiation sémiotique de notre signe-artefact, icône du théorème de Thalès.

Médiation sémiotique du signe-artefact	Les constructions du produit rendent compte d'une influence produite par notre signe-artefact. De ce fait, il y a eu nécessairement une transposition de la configuration de Descartes au plan affine et donc la reconnaissance d'un angle nul ; cette reconnaissance explique le bon positionnement du produit dans le cas où les angles des facteurs ne sont pas nuls. La construction de triangles semblables par C1-I14 serait peu probablement le produit de la seule mise en place des propriétés du produit de nombres complexes.
Signification géométrique de la multiplication	Il existe une mise en évidence de la signification géométrique du produit : la signification de cette opération mathématique est visible dans les constructions faites comme réponse à la question *4.b*. Le produit peut ainsi s'interpréter comme la transformation d'un triangle en un triangle semblable par agrandissement (ou réduction).

8.2.6 Analyse d'une transcription d'un extrait de vidéo des élèves de la classe C-nonS-nonRS : leurs réponses aux dernières questions de la séquence et notre défi de déterminer leur degré de compréhension

Cette transcription (cf. Annexe I) a l'objectif de donner des informations plus précises concernant les interactions produites entre les élèves d'une de nos classes. Comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, ce groupe d'élèves est aussi associé à une des classes élaborées en fonction des réponses à la dernière question de la séquence. Ce choix est justifié par le fait que, dès le début de nos analyses, nous réfléchissions aux motivations des élèves de la classe C-nonS-nonR qui les conduisent à ne prendre en compte, dans leur réponse à la dernière question, que les propriétés de la multiplication des nombres complexes. De quelle compréhension cette réponse rend-elle compte ? (Sfard, 2008) Nous nous intéressons aussi à la validation de notre hypothèse concernant le potentiel sémiotique de notre signe-artefact (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) ainsi qu'au rôle des interactions sociales (Radford, 2003, 2004) au milieu d'un processus d'apprentissage-enseignement.

Figure 8.26 – C2-I4 dans la question 4.b

Quelques remarques techniques

Cette transcription, mise dans sa totalité dans l'annexe I, présente d'une façon très simple, à l'aide du logiciel Subtitle Edit, les dialogues menés à l'intérieur du groupe dès qu'ils ont commencé la résolution de la question *4.b*. La vidéo est le résultat d'un enregistrement non professionnel, ce qui nous a couté quelques pertes d'information… pour ne pas avoir branché un microphone… De ce fait, « […] » indique des mots ou de petites phrases non audibles et « … » des silences ou des pauses. La longueur approximative de ces silences ainsi que du temps pris par les élèves dans leur discussion est indiquée d'une façon très détaillée à côté de chaque ligne numérotée.

Nous intercalons aussi quelques explications entre parenthèses concernant certains gestes simultanés des élèves au moment où ils sont en train de décrire ou d'expliquer leur construction. Les interventions de l'enseignante peuvent être identifiées par la lettre « P ». Quand ses interventions dans le groupe ne sont pas transcriptibles, nous les décrivons aussi entre parenthèses.

Le groupe enregistré était extraordinairement plus nombreux que les autres groupes faisant partie de l'expérience. Les élèves ont été identifiés par les lettres « A », « B », « C », « D » et « E » et, comme dans tous les grands groupes, le défaut se trouve dans la participation plus représentative de seulement quelques élèves.

Finalement, quelques photos du travail des élèves s'intercalent dans la transcription. Nous avons droit d'image sur tous les élèves du groupe. De la même manière, des extraits de la séquence représentative du travail du groupe seront intercalés au long de l'analyse.

Introduction et aperçu de la complexité de la tâche proposée

La question à laquelle les élèves doivent répondre correspond à la construction géométrique du produit de deux nombres complexes (cf. Question *4.b* de la séquence). Ils viennent préalablement d'établir les relations entre les normes et les angles des facteurs et les normes et les angles du produit. Ils ont exprimé, en langage algébrique et en langue naturelle, la somme des angles et le produit des normes (cf. Annexe J).

Tout au début, le travail des élèves semble commencer par l'intention de mettre en place d'une façon immédiate des propriétés géométriques de la multiplication des nombres complexes mentionnées ci-dessus. Néanmoins, la discussion s'est élargie et le processus de résolution est devenu très complexe pour eux :

1. A : En fait, il faut construire le… produit de ça.
2. A : En multipliant l'un et en ajoutant l'autre (rires).
3. B : En fait, c'est simple. Ah, mais je sais, j'ai trouvé. (Ils lisent et relisent la question, puis ils reviennent en arrière pour regarder leur réponse à la question précédente.)

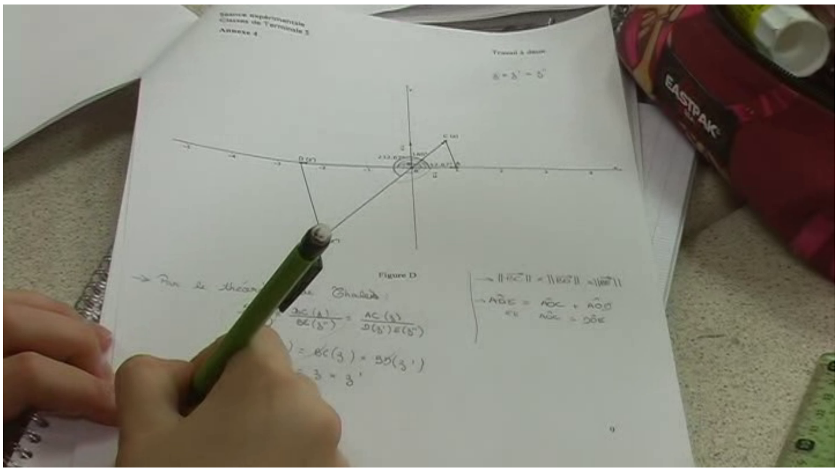
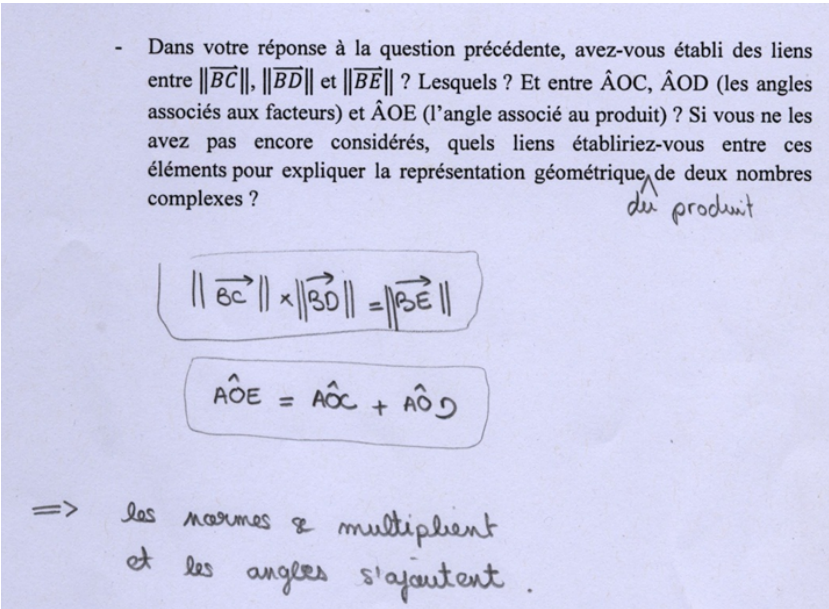


Figure 8.27 – C2-I4 dans la question 4.a



- Dans votre réponse à la question précédente, avez-vous établi des liens entre $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{BD}\|$ et $\|\overrightarrow{BE}\|$? Lesquels ? Et entre ÂOC, ÂOD (les angles associés aux facteurs) et ÂOE (l'angle associé au produit) ? Si vous ne les avez pas encore considérés, quels liens établiriez-vous entre ces éléments pour expliquer la représentation géométrique du produit de deux nombres complexes ?

$\|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{BE}\|$

$\widehat{AOE} = \widehat{AOC} + \widehat{AOD}$

$\Rightarrow$ les normes se multiplient et les angles s'ajoutent.

Figure 8.28 – Réponse du C2-I4 à la question 4.a

4. C : Attendez, dans quel sens déjà on donne les [. . .]

5. B : On représente sur le graphique, alors. . . Il faut construire la représentation, tu vois ?

6. A : (C fait une construction où le produit ne correspond pas au produit des modules car la longueur est trop courte. La position n'est pas correcte non plus car la droite où le produit a été placé ne correspond pas à une addition des angles des facteurs. Cette droite correspond à celle qui a été placée par B et que nous décrivons par la suite.) Mais c'est tout petit !

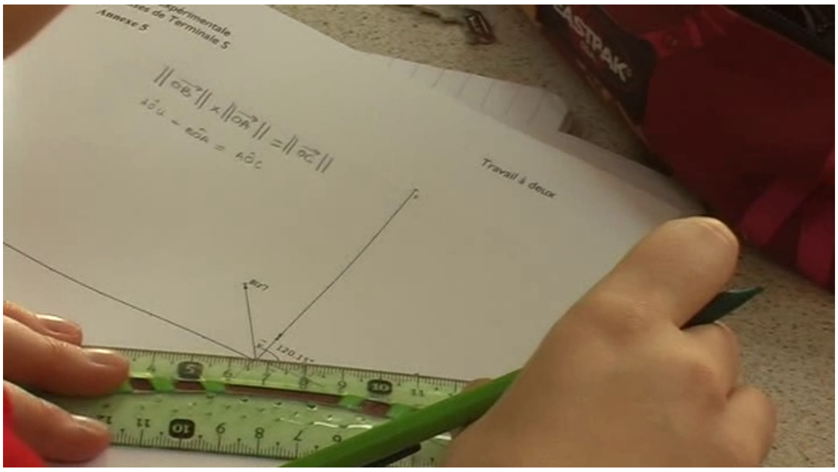


Figure 8.29 – C2-I4 dans la question 4.b

7. B : Déjà voilà, c'est ça. (B trace une droite qui correspond à un élargissement dans le sens négatif du vecteur $\overrightarrow{OA}$. Cette droite correspond exactement à la droite portant le produit dans la représentation géométrique donnée dans la question *4.a* ; en même temps, C réécrit en langage algébrique les propriétés de la multiplication des nombres complexes : somme d'angles et produit de modules. Puis tous les autres vont tracer la même droite que B.)

8. P : (L'enseignante fait une remarque à toute la classe car plusieurs groupes étaient restés très longtemps bloqués dans la dernière petite question de la question *4.a.*.) Vous m'écoutez deux secondes ? Quand vous êtes à la page huit, quand on vous pose la question d'établir des liens entre les éléments pour expliquer la représentation géométrique du produit de deux nombres complexes, on vous demande de trouver la relation entre les normes des facteurs et la norme du produit. Et une relation, donc une relation éventuellement entre les angles des facteurs et l'angle du produit. Et c'est tout. On ne vous demande pas par exemple des choses entre les normes et les angles. On vous demande juste les normes, entre elles, entre les normes des facteurs et les normes du produit, et entre les angles des facteurs et l'angle du produit. Et après c'est tout.

Comme nous pourrons l'observer au cours de la transcription, le travail des élèves reste, la plupart du temps, très local. À un moment donné, les questions se concentrent sur *la forme*, par exemple, *nommer ou non un point*, *comment le faire* ou *où le placer*. Néanmoins, grâce à la recherche collaborative menée par le groupe, des aides et des commentaires se partagent et les élèves arrivent petit à petit à corriger leurs constructions. Ils arrivent à faire avancer leur recherche même si, à plusieurs reprises, leurs réponses restent incomplètes et imparfaites.

Un autre aspect à remarquer est leur besoin de *suivre le bon modèle*, d'avoir les mêmes informations que dans la question précédente ainsi que leur difficulté à reconnaître ces informations quand il y a quelques variations dans leur représentation :

18. D : Ça me parait bien petit, non ? (Il signale la construction faite par A.) Si tu multiplies… si tu multiplies ça fera bien plus grand, non ? [...]

19. B : Mais on n'a pas de chiffre.

20. B : Il fallait le placer où, le point ? A : Non, ça va, c'est pas grave !

21. B : Vous ne savez pas s'il faut construire un point ?

22. A : J'ai construit B ici.

23. D : J'ai mesuré ici, j'ai mesuré là… (Il montre les modules.)

24. C : Oui, mais tout à l'heure, dans l'autre schéma, le produit des deux, ça faisait pareil.

25. B : Attendez, je n'ai pas compris.

26. D : J'ai mesuré ceci, j'ai mesuré celui-là, j'ai fait le produit des deux.

27. A : Il a oublié de mettre un point D. Tu mets un point D sur la droite.

28. C : N'importe où ?

29. A : Et tu traces ça, et après tu traces, hop… parallèle là, comme ça.

30. B : $3,1$ fois 4 ça fait $12,4$, non ? (B prend la calculatrice et vérifie son calcul.)

31. A : Vérifie ! (rires) [...]

32. B : Mais si, parce que la relation de tout à l'heure, tu utilises la relation de tout à l'heure, et les normes, c'est des distances.

33. B : Premièrement j'avais mis la relation entre ça et ça, du coup quand tu remplaces… on l'appelle comment, le point ?

34. B : Mais ça parait tout petit ! (En observant le produit placé par A et C.)

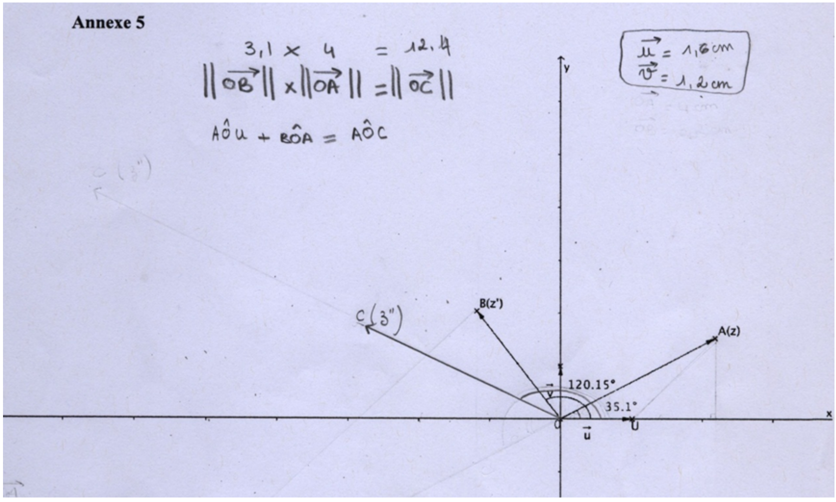


Figure 8.30 – Réponse du C2-I4 à la question 4.b

35. B : C'est de la multiplication, ça doit être largement [. . .]

36. B : Mais. . . pour vous c'est petit !

37. A : Mais oui, mais je l'ai mis au pif. Je ne me suis pas cassée la tête à. . .

38. B : Mais tu ne mets pas au pif puisque tu as les normes. Du coup tu as les longueurs.

39. C : Est-ce que vous êtes sûrs que là. . . ?

40. B : Ben, oui. Parce que $\overrightarrow{OA}$ c'est positif et $\overrightarrow{OB}$ c'est négatif, donc le produit des deux c'est négatif.

41. B : Tu as trouvé 12, 1 ? Non, c'est. . .

42. B : Non c'est 12, 4 [. . .]

43. B : Voilà, et après ça fait. . . . On l'a laissé comment ? On l'appelle. . . ?

44. C : Ah, les normes, on fait à partir de là. On fait à partir de 0. . . ?

45. A : Oui, 3, 1 fois 4.

46. A : Euh, j'ai une question : il faut bien placer un autre lettre ? Voire l'utiliser pour l'expliquer. . . . Placer une lettre D parce qu'après on va dire par angles opposées. . .

47. B : Mais non, parce que là. . .

48. P : Pourquoi faire une construction très compliquée ? Il faut juste appliquer. . . ce qui permet d'établir. . .

49. B : Là, tu as l'angle $\widehat{AO\ldots}$ je ne sais pas quoi, l'angle $\widehat{AOC}$. Tout ça, ça correspond à l'angle $\widehat{AOD}$.

50. A : Si tu dis que ça c'est $\widehat{AOD}$, il faut rajouter un point là quelque part…

51. D : Il manque le troisième point, c'est quoi ça (D montre la position du point encore une fois avec son équerre. Puis, du silence et des réflexions non audibles. Ils observent tous leur construction, ils regardent encore une fois la configuration précédente.)

52. B : Moi ce qui me perturbe, c'est que là, en fait (elle montre les points dans la configuration précédente), on a trois points, pour en former un, et là on n'en a que deux pour en former un.

53. A : Moi, je trouve que ça tombe sur le point U.

54. E : Oui, c'est le point U.

55. A : Ça s'appelle le point U ?

56. B : Ah, c'est un point ! C'est un point ! Ah, d'accord.

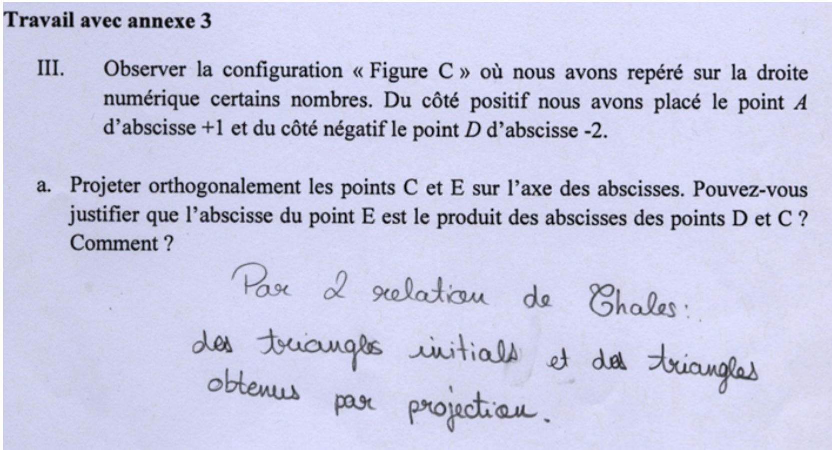
57. P : Ça, c'est pas un point, c'est le vecteur…

58. P : Vous avez juste à appliquer ce que vous avez remarqué particulièrement… au niveau de l'angle je ne comprends pas ce que vous faites ici… (Elle leur montre les angles qu'il faudra normalement additionner et elle signale que leur somme ne pourrait peut-être pas être placée là où ils l'avait imaginée.)

En ce qui concerne les difficultés que les élèves ont rencontrées et qui ne leur ont pas permis de construire tout de suite le produit recherché, nous pouvons dire qu'elles résultent des difficultés propres au processus cognitif de conversion décrit par Duval (2006) : les élèves viennent de découvrir les propriétés géométriques de la multiplication des nombres complexes à partir de l'analyse de la représentation géométrique donnée dans la question *4.a* ; ils les ont exprimées en langage algébrique mais ils ne sont pas capables de les convertir en une représentation géométrique. En tout cas, comme nous l'avons déjà dit, la seule construction de la représentation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes à partir des propriétés apprises n'est pas représentative de la compréhension de la signification de la multiplication en géométrie.

De ce fait, la construction attendue ne visait pas la seule mise en œuvre du processus de conversion que nous venons de mentionner. Il fallait agir en fonction de tout le travail réalisé pendant la séance. Bien sûr, nous nous attendions à une action influencée par l'analyse de notre signe-artefact (icône du théorème de Thalès) tout au long de la séquence. Ainsi, cette construction devait porter les propriétés de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes, laquelle avait été analysée au cours de la séance et qui, maintenant, devrait nécessairement être associée à des transformations dans le plan complexe. Cette influence s'est bien manifestée mais, comme nous le verrons par la suite, elle n'a donné, au moins explicitement, que des résultats partiellement associés à ce qui était attendu.

Pour mieux comprendre ce dernier constat, nous allons faire une parenthèse pour observer les réponses que le groupe a données à la troisième question de la séquence :



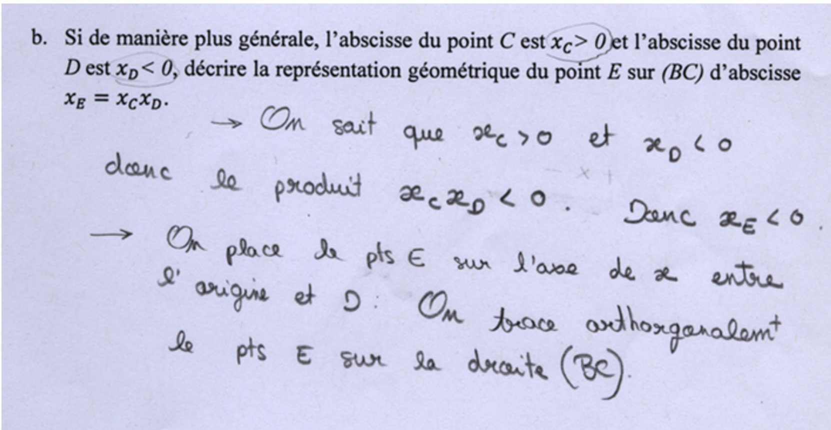
Travail avec annexe 3

III. Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point *A* d'abscisse +1 et du côté négatif le point *D* d'abscisse -2.

a. Projeter orthogonalement les points C et E sur l'axe des abscisses. Pouvez-vous justifier que l'abscisse du point E est le produit des abscisses des points D et C ? Comment ?

Par l relation de Thales :
des triangles initials et des triangles obtenus par projection.

Figure 8.31 – Réponse du C2-I4 à la question 3.a



b. Si de manière plus générale, l'abscisse du point *C* est $x_C > 0$ et l'abscisse du point *D* est $x_D < 0$, décrire la représentation géométrique du point *E* sur *(BC)* d'abscisse $x_E = x_C x_D$.

→ On sait que $x_C > 0$ et $x_D < 0$
donc le produit $x_C x_D < 0$. Donc $x_E < 0$.
→ On place le pts E sur l'axe de x entre l'origine et D : On trace orthogonalem^t le pts E sur la droite (BC).

Figure 8.32 – Réponse du C2-I4 à la question 3.b

Comme nous l'avons déjà dit, la réponse à la troisième question de la séquence pourrait sans doute nous donner quelques pistes qui nous permettraient d'expliquer ou de mieux comprendre les réponses aux dernières questions. Dans ce cas, nous pouvons observer la mobilisation non significative du théorème de Thalès dans la réponse à la question *3.a.*, puisque son utilisation n'a pas du tout influencé, du moins pas explicitement, la réponse à la question *3.b.*. Les transformations sont restées absentes, la règle des signes a bien été évoquée mais le placement du produit est resté descriptif et non pas analytique.

Sur le potentiel sémiotique de l'artefact et sur la médiation de l'enseignant dans un Espace de Travail Mathématique Collaboratif

Tout au début de la séquence, le théorème de Thalès n'était qu'un outil pour la preuve de la multiplication de Descartes. Plus tard, les composantes de l'icône le représentant apparaissent intégrées au discours mathématique associé à la construction géométrique de la multiplication. De ce fait, nous avons notamment observé l'intention de prendre en compte les droites parallèles constituant l'icône du théorème de Thalès : d'après leur discours, les élèves avaient l'intention de prendre en compte « la propriété de Thalès ». De cette manière, l'évolution de notre signe-artefact s'est bien manifestée dans le discours d'un des élèves (voir D, lignes 15-16, 64-66) ; néanmoins, elle reste limitée et même, à certains moments, bloquée, à cause de la forte influence d'une pensée habituée à la mise en place de *recettes* — ou, en des termes plus élégants, de *techniques* — ou encore au besoin de suivre un *bon modèle* :

9. P : (Elle se promène un peu dans la salle puis elle ajoute :) Ne cherchez pas dans vos cours précédents, hein ? Parce que justement, on n'a pas fait le cours dessus.

10. B : (Le groupe reprend son travail.) […] Attends, je suis encore là bas.

11. C : Parallèles…

12. C : On a des parallèles ici.

13. A : Il faut faire la parallèle ici, non ?

14. C : Je montre la parallèle, là, non ?

15. D : C'est la parallèle. Sinon on ne pourra pas utiliser […]

16. D : En traçant la droite, et en traçant la parallèle ici… (D montre sur sa feuille, avec une équerre, deux droites parallèles : l'une d'entre elles correspond à la droite passant par les points U et A. Sa parallèle passe par le point B et coupe OA permettant, de cette façon, de trouver le « produit » cherché.)

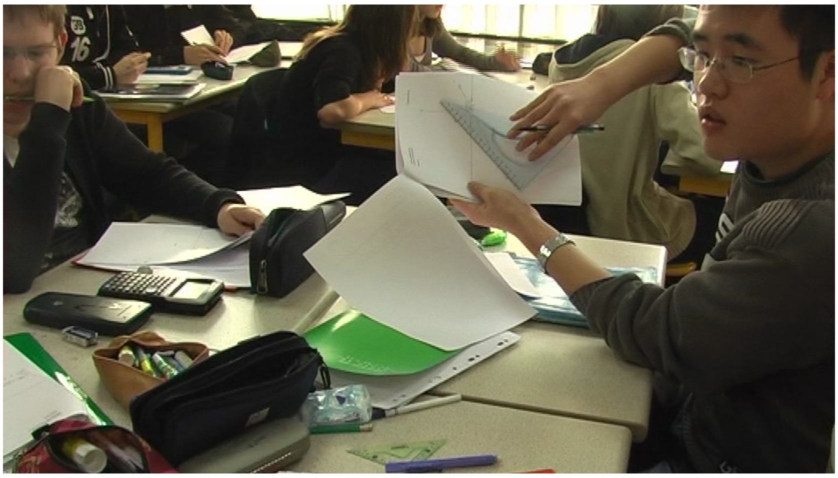


Figure 8.33 – C2-I4 dans la question 4.b

17. B : Ah, oui ! […]

De ce fait, ce qui a motivé les élèves à tracer des parallèles reste encore très flou, car l'intérêt de les utiliser pourrait juste correspondre au fait que *c'est ce qu'il faut faire*. Ainsi, nos interprétations de cette évolution restent au niveau de conjectures puisque le discours des élèves doit nécessairement être interprété à l'aide d'une forme d'intervention qui puisse encourager sa verbalisation (Radford, 2003) et qui leur permette de développer leur discours ! Par contre, ce développement n'a pas pu se produire de façon optimale à l'intérieur des échanges que la conception de notre séance expérimentale permettait entre les élèves. Sur cet aspect, nous avons ajouter que la place que nous avons donnée à la médiation de l'enseignant était limitée.

Si nous faisons attention aux commentaires de D (voir ligne 64), nous observons que celui-ci insiste sur ce *besoin* de construire *en respectant les propriétés de Thalès* mais ses commentaires se perdent dans des discussions où ses idées ne peuvent pas se développer parce que non prises en compte par ses camarades et non guidées par l'enseignant, alors absent : "the mathematical activities were designed to be carried out by small groups of two to three students and were usually followed by general discussions conducted by the teachers. This allowed the students to share, analyse, and eventually revise their differents solutions" (Radford, 2003, p. 45) :

59. D : Il faut s'aider des angles afin de trouver là où il fallait « *volter* » la droite.

60. B : Excuse… est-ce qu'on peut m'expliquer encore ?

61. D : En fait, on repart à zéro !

62. D : Madame Rémy nous a conseillé de construire la droite, z", avec l'histoire des angles.

63. E : tu as un rapporteur ? (À ce moment, ils se concentrent à mesurer les angles (au rapporteur) et les modules (à la règle graduée). Ils effacent leur construction avec les parallèles et ils trouvent, après beaucoup de réflexion et des calculs, la position de la droite où il faudra finalement placer le produit résultant de l'addition d'angles et du produit de modules en centimètres. Même en connaissant la mesure résultant de la somme des angles des facteurs, ils n'arrivent pas facilement à placer le produit.)

Figure 8.34 – C2-I4 dans la question 4.b

Figure 8.35 – C2-I4 dans la question 4.b

64. D : Ça me parait vraiment étrange que l'on peut pas arriver à la propriété de Thalès.

65. B : C'est pas forcement que j'ai utilisé Thalès à chaque annexe.

66. D : Mais justement on doit vérifier les mêmes propriétés que… là bas

67. B : non mais c'est que tu évolues. Au début on disait Thalès, après on a parlé de normes, après on a parlé de… pour arriver aux nombres complexes […]

Nous pouvons encore une fois observer ce travail local des élèves, non seulement focalisé sur un aspect technique mais aussi sur une tâche spécifique telle que la réponse à une question déterminée de la séquence. Par exemple, une des élèves s'exprime clairement par rapport à l'existence d'une évolution des connaissances au cours de la séance sans avoir du tout l'intention de vouloir établir des relations entre elles (Voir B, ligne 67).

Compte tenu de ce qui précède, la place limitée que nous avons donnée aux phases de bilan en classe de Terminale S nous conduit à repenser quelques éléments structurels de notre séance expérimentale. La complexité des processus cognitifs impliqués dans notre séquence ainsi que la diversité des appropriations de l'Espace de Travail Mathématique au milieu d'un travail collaboratif nous ont conduits à des réflexions portant sur des changements de variables liés à l'importance de la médiation et de l'orchestration active de l'enseignant (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), même dans une séance où nous ne considérions que le réinvestissement des connaissances mathématiques déjà acquises.

À partir de l'observation des interactions produites dans le groupe observé, nous nous sommes aperçus que la verbalisation des élèves entre eux ne permet pas de faire évoluer la discussion, au point qu'aucun vrai débat autour de leurs interprétations respectives ne se produit et qu'ils ne peuvent pas développer leurs pensées : "Although the role of speech in pattern activities has been escouraged in previous approches […] students often do not spontaneously verbalize the pattern (Lee, 1996)" (Radford, 2003, p. 45). De ce fait, plusieurs de leurs questionnements n'ont pas nécessairement trouvé de réponses (voir lignes 77-81) :

68. B : Décrire votre construction… c'est quoi ça. (Ils passent à la dernière question.)

69. B : Alors, euh… alors on…

70. C : Elle dit, euh… elle lie la multiplication et l'addition ?

71. B : L'addition est liée à…

72. A : Non, là, quelle signification.

73. C : La multiplication mélange l'addition et puis…

74. B : Maintenant il faut parler des angles…

75. C : Mais justement ils s'additionnent. (À ce moment de la discussion, l'enseignante leur fait remarquer que, pour mesurer le produit dans la question précédente, ils n'ont pas pris en compte la mesure de l'unité. Ils reprennent donc leur travail précédent et ils se retrouvent avec la difficulté de ne pas savoir convertir leur résultat en centimètres à un résultat mesuré en unités. Nous faisons la remarque que cette difficulté a aussi été retrouvée dans d'autres classes ayant fait l'expérience. Après plusieurs échanges à l'intérieur du groupe, ils vont placer leur produit d'une façon approximative puis ils vont retourner à la dernière question de la séquence. Quelques minutes plus tard commencera la pause déjeuner. L'après-midi commence par un bilan fait par l'enseignante qui reprend le travail des trois premières annexes puis les groupes ont encore quelques minutes pour finir leur construction et donner, si possible, une réponse à la dernière question. Notre groupe reprend donc son travail mais ils retournent encore à la construction du produit de deux nombres complexes. Une fois dans la dernière question, ils se questionnent sur ce qu'on fait quand on multiplie deux nombres complexes.)

Sur la réification

Un autre aspect sur lequel nous voudrions faire le point porte sur la réification (Sfard, 2008) de connaissances mises en jeu dans la séquence :

> "Reifying effect was attained by replacing the description of doing [...] with the remark *on having a certain thing* [...]. In all cases, the technique was to introduce a noun [...] that helped to squeeze a lengthy story of repetitive but transitory actions into a narrative on permanent, even if evolving, entities." (Sfard, 2008, 44-45)

Voici, dans le texte ci-dessus, ce que nous cherchions. Le but attendu. La compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres. Ainsi, en regardant la dernière partie de la discussion transcrite (voir les lignes 59-82), nous pouvons entrer dans une conversation que nous avons déterminée comme le cœur de la discussion :

76. B : Quand on multiplie les vecteurs on tourne, on multiplie leurs normes et on additionne leurs angles...

77. B : Mais quelle signification... quelle signification...

78. D : ... On a travaillé sur... Regarde, Descartes qui a construit une représentation géométrique de la multiplication [...].

79. B : Mais quelle signification, je ne comprends pas quelle signification.

80. B : Quelle signification géométrique…

81. B : C'est une définition en fait, signification géométrique, définition géométrique…

82. D : (Continue à regarder les pages de la séquence.) … Multiplication de normes et addition de, des angles… […]

Figure 8.36 – C2-I4 dans la question 4.b

La multiplication des nombres complexes a été implicitement vue comme une transformation. B parle de *tourner* et, même avant (voir la ligne 59), D parlait de *volter* la droite pour construire le produit. De plus, B décrit le processus, elle raconte ce qui se passe en géométrie quand on multiplie. Néanmoins, l'histoire racontée en termes d'actions transitoires n'en est pas venue à exister en termes d'objet, en termes métaphoriques (Sfard, 2008) : le produit n'a pas été interprété comme *une transformations dans le plan*.

Compte tenu de ce qui précède, pourrions-nous juste dire qu'il n'y a pas de compréhension de la signification géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?

Quand D revient en arrière, quand il réétudie tout ce qu'il a fait au cours de la séance en concluant que la signification géométrique de la multiplication est *la multiplication de normes et l'addition des angles*, pourrions-nous dire qu'il est sur la bonne voie pour la construction de la signification attendue ? Nous reviendrons sur cet aspect dans nos conclusions.

8.3 Premières conclusions

8.3.1 Des réponses des élèves aux premières questions de la séquence

Les réponses à la première question

Un travail qui commence avec les relations de proportionnalité, sous-jacentes à un objet mathématique culturellement reconnu, se développe jusqu'à la mise en en place, d'interprétations géométriques de certaines des significations de la multiplication.

Ayant déjà étudié et comparé plusieurs parcours des élèves, il nous semble intéressant de faire quelques commentaires par rapport au travail concernant le début de la séance, où nous comptions identifier les interventions initiales du processus de médiation sémiotique qui a inspiré nos expérimentations.

En observant quelques réponses des élèves à la première question (cf. Annexe K) nous pouvons vérifier le fait que le théorème de Thalès a bien été mobilisé par tous les individus ; néanmoins, la question incontournable porte toujours sur la compréhension : cette mobilisation de connaissances, de quelle compréhension rend-elle compte ?

D'ailleurs, la figure a bien été un support de raisonnement pour les élèves (Kuzniak, 2010) et nous l'observons à partir des traces écrites dans la plupart d'entre elles. Soit il y a des traces mettant en relation les segments proportionnels, soit l'unité a été soulignée. En outre, la plupart des informations données dans l'énoncé, dans le texte de Descartes et dans la figure, ont bien été prises en compte dans les procédures de résolution mises en place par les élèves. Néanmoins, la justification du produit de Descartes par le théorème de Thalès ne mobilise aucune connaissance portant sur la signification géométrique de la multiplication : le passage d'un registre de représentation à un autre a bien été présent, la multiplication de Descartes a été acceptée et justifiée, le théorème de Thalès a été visualisé.

Les réponses à la deuxième question

L'analyse de la deuxième question nous a permis de nous rapprocher un peu plus de ce regard géométrique de la multiplication et nous a conduit à focaliser notre attention, notamment, sur le rôle des signes. Nous parlons ici d'un signe remplissant le rôle d'un signe-artefact, sachant qu'il correspond bien à un signe qui évoque des significations personnelles et des significations mathématiques (Falcade, 2002).

Nous savons déjà que le processus cognitif explicite dans cette deuxième tâche était la construction géométrique, construction pour laquelle nous n'avons pas précisé les outils géométriques qui pouvaient être utilisés. Nous demandions la construction d'une représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes et nous n'avons donné que quelques pistes pour le faire : *placer un point puis construire un autre*. Par contre, ce qui nous intéressait le plus, ce n'était pas comment les élèves allaient construire ce produit en termes de la perfection du résultat obtenu grâce aux techniques formelles de construction, mais l'interprétation de l'énoncé et les justifications nous permettant d'identifier le début de ce qu'aurait pu être *l'entrée en action* d'une icône du théorème de Thalès. L'action de cet icône devait correspondre à celle d'un *signe-artefact*, juste au moment où un processus de médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) s'initiait.

La représentation géométrique du théorème de Thalès, reconnu dans la configuration géométrique présente dans la première question et mobilisé (quant à ses propriétés) pour justifier le produit de Descartes, a été de la même manière évoqué encore une fois dans les réponses à la deuxième question pour justifier la construction d'un produit analogue, avec un des facteurs multiplicatifs de différente nature. En suivant les réponses des élèves, nous pouvons observer qu'ils ont bien décrit leurs constructions, formellement faites ou non, et qu'ils ont justifié la vérité du produit ainsi que son analogie avec le produit de Descartes : la prise en compte de l'unité $[BA]$, (DE) parallèle à (AC) et la proportionnalité des segments constituant la configuration.

De ce fait, c'est l'analyse de la représentation géométrique du produit de Descartes déjà travaillée dans la première question, celle qui a donné comme résultat que cette représentation géométrique est venue remplir le rôle d'un artefact notamment celui d'un objet symbolique (Rabardel & Samurçay, 2001). En effet, ce même signe-artefact a fait appel à la proportionnalité sous-jacente à la représentation du produit en question. Cela est bien une hypothèse qu'il faudra, bien sûr, vérifier.

Nous associons le processus décrit ci-dessus à une entrée épistémologique dans l'Espace de Travail Mathématique. Nous parlons d'une genèse sémiotique ayant son origine dans le plan épistémologique et des objectifs dans le plan cognitif : dans un espace réel, une représentation géométrique donnée *génère* une visualisation grâce à la reconnaissance d'une configuration et des propriétés du théorème de Thalès. Ce processus finalise dans la construction d'une nouvelle configuration possédant les mêmes propriétés et dans la vérification de l'existence d'un produit possédant les mêmes caractéristiques.

Or, il y a un autre aspect à considérer. Notre objet symbolique ou signe-artefact devait amener les élèves, comme un "vehicle for learning" (Winsløw, 2003, p. 275) des significations personnelles aux significations mathématiques. Nous déterminons, dans notre cas particulier, que les significations personnelles correspondaient à ce qui était "familier pour les élèves", i.e. la proportionnalité des segments constituant la représentation géométrique du théorème de Thalès. La signification mathématique, c'est-à-dire le savoir initialement visé à *développer* et à *acquérir* dans le processus d'apprentissage en cours, était la visualisation de cette représentation comme une représentation géométrique de la multiplication. Ceci dit, il devait donc se produire un processus qui entrainait l'établissement d'un lien entre les deux.

Ce processus s'est-il produit ? Comment ? D'après les réponses des élèves à la deuxième question (cf. Annexe L), la réponse donnée par A décrit le processus de construction des points D et E en fonction d'un coefficient k, rapport de proportionnalité qui se différencie de k' compris entre 0 et 1 dans les relations existantes dans la première question. De ce fait, étant donné la proportionnalité des nouveaux segments ainsi que la prise en compte de l'unité, BE est bien le produit analogue au produit de Descartes. La condition $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$ est donc bien présente comme dans toutes les autres réponses exprimées. Si nous observons la réponse donnée par E, nous verrons que la justification attendue sort de la seule mise en relation entre les éléments constituant les représentations avec une entrée strictement en GII : la construction a bien été faite en suivant la méthode de Descartes mais les élèves se sont aussi appuyés sur la figure en mesurant les segments faisant partie de la représentation de la multiplication. De plus, ils ont dit : *graphiquement, on trouve encore...* puis ils ont donné les relations de proportionnalité entre les segments. Ceci nous renvoie au questionnement sur l'existence d'une géométrie mixte (Kuzniak, 2010) et au degré de liberté, quant à l'usage des représentations visuelles, susceptible d'exister à ce niveau de l'enseignement.

Les élèves savent bien depuis qu'ils ont été en classe de Quatrième qu'il faut mettre en doute ce qu'*ils voient* sur une construction géométrique et qu'il faut justifier à l'aide des propriétés. Ceci dit, l'intérêt de favoriser des situations qui motivent la prise en compte de la figure ne vise pas le remplacement des propriétés ou du formalisme de la preuve, mais le *comment* la référence aux représentations géométriques peut, d'une part, favoriser la formalisation attendue et, d'autre part, faciliter la manipulation d'objets mathématiques abstraits grâce à la compréhension de leur provenance :

> "Un enseignement vivant gagne selon moi à être émaillé de telles images, à condition

bien sûr qu'elles ne soient pas présentées comme des modèles, mais plutôt comme des analogies, qui servent d'amorce au vrai travail de réflexion " (Tanguay, 2000, p. 6).

Par ailleurs, la réponse donnée par G (cf. Annexe L) rend compte d'une construction qui a bien pris en compte les demandes de l'énoncé sans décrire pas à pas le processus de construction qu'ils ont mené. L'expression algébrique de la proportionnalité des segments dans la configuration (G1) nous a permis de constater, de même que dans tous les autres cas, la compréhension de ce qui fait l'analogie entre cette nouvelle représentation du produit et le produit de Descartes. La référence à *une diminution* (G2) aurait pu correspondre soit au fait d'avoir construit la même configuration mais en version réduite, sans plus de réflexions, soit à la considération d'une *diminution du produit* grâce à l'opération mise en place par un facteur BD compris entre 0 et 1. Cette deuxième possibilité faisait partie du processus de réflexion que nous attendions. Ainsi, tel que nous l'avons déjà souligné, ce type de réponses à été un élément clé dans la recherche de *parcours* des individus puisque ce sont justement les réponses à la deuxième et troisième questions, celles qui nous ont orienté dans l'interprétation des réponses des élèves aux dernières questions de la séquence.

8.3.2 La complexité de l'Espace de Travail Mathématique proposé : pour une intégration plus active de l'enseignant comme médiateur culturel

Les résultats dont nous avons rendu compte permettent de montrer la pertinence de notre méthodologie exploratoire d'analyse mixte. Nous avons pu valider les classifications *faites à la main* en différenciant des trajectoires des élèves en fonction de leur réponse à la dernière question de la séquence. L'analyse didactique initiale puis complétée par notre analyse statistique expérimentale, nous a permis de constater un point en commun entre les différents parcours des individus : la puissance du discours (propriétés de la multiplication de nombres complexes) qui a conduit la plupart des individus à favoriser une *genèse instrumentale* dans la question *4.b* sans prendre en compte le travail développé pendant la séance. Cette genèse instrumentale, comme nous l'avons déjà dit, privilégie la construction en étant un obstacle à la genèse discursive articulée avec la visualisation.

Plus en détail, nous avons aussi essayé de comprendre les individus qui ne concluent que sur les propriétés algébriques des nombres complexes sans mettre en relation ce résultat avec le travail géométrique effectué pendant la séance. Leurs motivations restent encore inconnues, par contre, l'analyse didactique du reste de leur parcours nous a déjà donné quelques éléments de réponse. Une explication possible pourrait venir d'un blocage lié au passage à l'interaction entre l'instrumental et le discursif lorsque les éléments de preuves ne sont pas tout à fait congrus aux instruments utilisés, ici par exemple l'homothétie et la rotation, de la même manière que nous nous attendions à la compréhension de la dynamique entre Thalès, multiplication, facteurs, opérateurs et transformations.

En conséquence des nouveaux questionnements émergent grâce à la diversité des synthèses ainsi qu'aux ressemblances et différences entre les parcours étudiés. Les réponses obtenues rendent bien compte de l'engagement des élèves tout au long de la séance. Elles montrent aussi la difficulté à gérer les différentes genèses propres aux Espaces de Travail Géométrique et aux Espaces de Travail Mathématique. Nous sommes bien conscients de la complexité cognitive de l'activité proposée, étant donné qu'il n'y a pas de conversion directe entre un registre de représentation et un autre à cause de la non-correspondance entre les éléments de chacun d'entre eux comme nous venons de le mentionner dans le paragraphe ci-dessus.

De ce fait, nous avons été amenés à situer certaines des activités proposées aux élèves à l'intérieur d'un espace de travail mathématique où la signification des objets mathématiques devait émerger grâce à l'action d'une genèse cognitive. Cette genèse suppose des enjeux sémiotiques complexes tels que ceux qui ont été décrits par D'Amore et Faldino (2008) dans leur *change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their differents representations*, pour rendre compte des difficultés de passage entre différentes représentations :

> "The process of meanings endowment moves at the same time within various semiotic systems activated ; we are not dealing with a pure classical dichotomy : treatment/conversion, that leaves the meaning prisoner of the internal semiotic structure, but with something much more complex. Ideally, from a structural point of view the meaning should come from within the semiotic system we are immersed in". (D'Amore & Faldino, 2008, p. 2)

Par exemple, et tel que nous l'avons déjà mentionné, le processus où le changement de registres de représentation sémiotique intervenait dans la première et deuxième question de la séquence était le suivant : analyser le texte de Descartes et de la représentation géométrique correspondante, reconnaitre une icône du théorème de Thalès et faire appel à ses propriétés pour prouver la véracité de la multiplication de Descartes, pour finalement interpréter les significations géométriques de la multiplication à travers la visualisation du rôle opérationnel joué par des facteurs de différente nature dans la relation de proportionnalité sous-jacente au théorème de Thalès.

De ce fait, la richesse de l'ETM proposé ainsi que la diversité des ETM personnels nous ont conduit à souligner l'importance de la médiation de l'enseignant dans le processus d'apprentissage enseignement visant soit la construction, soit le réinvestissement d'une connaissance mathématique. Cette *médiation* est indispensable pour progresser vers une institutionnalisation intégrant toute la richesse de l'activité proposée. En plus de la *médiation* liée au signe mathématique (ici le signe Théorème de Thalès), il nous a clairement manqué cette deuxième *médiation culturelle* (Radford, 2004) laquelle a dû être portée, dans notre cas, par l'enseignant dans la classe. Dans cette médiation culturelle, l'enseignant acquiert un rôle fondamental de guide à l'intérieur de la diversité des Espaces de Travail Mathématiques résultant d'une seule proposition didactique :

> "The object of knowledge is not filtered only by our sens as it appears in Kant, but overall by the cultural modes of signification […]. […] the object of knowledge is filtered by the technology of the semiotic activity [and] knowledge is culturally mediated". (Radford, 2004, p. 24)

Finalement, et suite à nos résultats de recherche, des nouveaux questionnements émergent concernant ce besoin d'une médiation encore plus active de la part de l'enseignant. Mais cet aspect sera développé par la suite dans nos conclusions générales ainsi que dans la présentation de nos perspectives de recherche.

Chapitre 9

Conclusions générales et perspectives de recherche

9.1 De l'étude des travaux historiques, épistémologiques et didactiques

Notre intérêt à la notion de multiplication et à ses relations avec la géométrie dans l'histoire et l'épistémologie nous a conduit petit à petit à la découverte d'éléments de réponse à notre première question de recherche. Ainsi, un lien étroit entre multiplication et géométrie correspond bien au fait que la multiplication, pour différents ensembles de nombres, trouve du sens dans un contexte géométrique, où elle peut être associée à des transformations géométriques.

Or, c'est grâce à une relation entre le numérique et le géométrique, établie dans la Grèce ancienne, que nous avons conçu nos séances d'apprentissage nous permettant d'étudier aujourd'hui la construction et le réinvestissement des significations de la multiplication en géométrie. Tel que nous l'avons déjà dit, le théorème de Thalès est au cœur de cette relation entre géométrie et calcul numérique et c'est bien son analyse qui nous a permis de construire nos propositions didactiques en lien avec ce contexte de transformation.

L'étude des travaux didactiques faisant référence à la multiplication de nombres relatifs et complexes nous a montré l'absence d'un modèle géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres. D'ailleurs, les représentations existantes souffrent de *trous représentationnels* surtout en ce qui concerne la représentation géométrique de la multiplication de nombres relatifs. Nous avons néanmoins la métaphore du demi-tour pour -1 (Lakoff & Nunez, 1897).

La question de la signification des objets mathématiques a aussi été un élément clé pour le développement de notre recherche. Grâce à la représentation géométrique de ces objets, la référence à la construction du *sens* nous a conduit à souligner le fait que la géométrie facilite l'accès à la compréhension du monde symbolique.

De ce fait, notre recherche s'est concentrée sur l'étude et la mise en place d'un processus de géométrisation de la multiplication où l'intégration de différents cadres mathématiques devient le cœur d'un processus visant la compréhension des nombres et de la multiplication à travers la représentation de leurs *actions*.

9.2 De l'étude des programmes du secondaire

Le cœur de cette étude a encore été la recherche de liens entre calcul et géométrie, là où l'apprentissage des nouveaux nombres s'intègre à l'ensemble de contenus institutionnellement nécessaires. Des réflexions portant sur le sens des opérations et sur l'importance d'un processus de recherche dans l'apprentissage-enseignement de mathématiques nous ont donné des justifications institutionnelles validant nos intentions didactiques ainsi que notre conception de l'enseignement.

En outre, et plus spécifiquement, cette analyse nous a permis de constater la pertinence d'étudier un objet mathématique riche et intéressant, non seulement grâce aux significations diverses dont il est porteur en soi-même mais aussi dans le sens où il construit la signification d'autres objets mathématiques tels que la droite graduée, les grandeurs, l'écriture fractionnaire, entre autres. Ainsi, produit, proportionnalité et géométrie trouvent une existence aussi bien historique qu'institutionnelle, même si ce n'est qu'implicitement et dans certains cas, en voie de disparition.

La responsabilité donnée aux enseignants de développer la compréhension des objets mathématiques par les élèves nous *dévolue* aussi la responsabilité de concevoir des situations favorisant la mise en oeuvre de la compréhension du *pourquoi* une opération mathématique permet la résolution d'un problème déterminé. De ce fait, les élèves ne devraient pas établir un lien mécanique entre un problème déterminé et le type d'opération qui permet sa résolution, par contre, ils devraient avoir conscience de la signification des opérations de sorte qu'elles puissent être disponibles dans des situations différentes portant sur les mêmes connaissances. Ceci s'effectuera toujours en prenant en compte des éléments clés pour le développement de la pensée mathématique et la compréhension des objets mathématiques, tels que le changement de cadres mathématiques et de registres de représentation sémiotique.

Compte tenu de ce qui précède, nous avons déterminé l'importance de compléter le discours institutionnel, portant sur la construction du sens des objets mathématiques, avec une présence explicite et profonde des propositions didactiques considérant la mise en relation entre différents cadres mathématiques, ceci implique non seulement une manipulation sémiotique en termes de changement de registres de représentation mais aussi, et d'une façon fondamentale, en termes de médiation.

Finalement, les réflexions didactiques développées au sein de l'institution en question ont favorisé la proposition de situations d'apprentissage nous permettant de mettre en place une autre façon d'interpréter l'enseignement des mathématiques (i.e. non seulement une réinterprétation des objets mathématiques eux-mêmes sinon de l'enseignement lui-même (méta niveau)). Tel quel, cela a une très grande portée en même temps que nous avons pu répondre à notre deuxième question de recherche portant sur le travail des élèves et de leur compréhension géométrique de la multiplication.

9.3 De l'Espace de Travail Mathématique pour la mise en évidence des significations géométriques de la multiplication : médiation sémiotique et parcours des élèves

Peut-on identifier et différencier des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM personnel (ou approprié) des élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?

Cette question, portant directement sur le travail mathématique des élèves et sur le regard théorique sous lequel ce travail a été étudié, correspond bien à notre deuxième question de recherche. Une séance non-traditionnelle d'apprentissage a été conçue spécifiquement pour répondre à nos intentions et à nos fins didactiques, lesquelles portaient sur la mise en relation des plans constituant l'Espace de Travail Mathématique grâce à l'action de genèses sémiotiques l'organisant et sur la médiation sémiotique d'un signe-artefact au milieu d'un travail collaboratif et socioconstructiviste d'apprentissage.

De ce fait, nous nous sommes situés dans la recherche de la détermination de la compréhension d'un objet mathématique. Cette recherche a été directement associée à la mise en relation de différents cadres mathématiques et de différents registres de représentation sémiotique. Cette compréhension devait se rendre *interprétable* grâce aux actions menées à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique où la mobilisation de connaissances anciennes devait permettre la mise en relation de ses composantes.

Or, nous avons pris conscience du fait que le point de départ des genèses articulant les deux plans de l'ETM se trouvait traditionnellement au niveau épistémologique. De ce fait, la visualisation d'un objet mathématique représenté dans un cadre non géométrique pourrait bien être le produit d'une manipulation d'artefacts [1] dans la construction d'une figure. Néanmoins, nous avons postulé que l'action des composantes du plan épistémologique pourrait être déclenchée par des genèses d'origine cognitive. Cette entrée cognitive à l'ETM ne pourrait avoir lieu que s'il existe des *significations métaphoriques* (caractéristiques sémantiques produites par visualisation ou reconnaissance des significations dans un contexte visuel) des objets mathématiques.

Les résultats obtenus d'une première expérimentation (que nous appelons diagnostique), nous ont donné les éléments de base pour la conception de nos séquences non-traditionnelles d'apprentissage pour des élèves des classes de Terminale S et de Quatrième. Pour la résolution des questions posées, lesquelles visaient la détermination de la compréhension des significations géométriques de la multiplication, une entrée cognitive à l'ETM était bien attendue et nécessaire.

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, nous avons intégré explicitement à l'ETM des intermédiaires, des signes médiateurs, *là où les mathématiques et la sémiotique se retrouvent, où les différentes genèses (Kuzniak, 2012) se produisent, à l'endroit où la recherche et l'acquisition de sens des objets mathématiques peuvent devenir accessibles grâce à la médiation sémiotique et, quand cela est possible, grâce aussi à la médiation sociale*. Ainsi l'ETM a été intégré à un processus socio-constructiviste de l'apprentissage où les dimensions socioculturelle et sémiotique coexistent dans la zone de développement proximale définie par Vygotsky (1934/1997). C'est bien là où des signes historiques ou technologiques doivent remplir leur rôle de médiateurs.

En ce qui concerne nos objets d'analyse nous avons décidé de déterminer et d'étudier les trajectoires des individus (groupes de travail) produites à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique. De ce fait, notre objectif était de décrire et de caractériser des parcours d'élèves

1. Ici le mot artefacts fait référence aux artefacts traditionnellement integrés à l'ETM tels que des outils pour la construction géométrique

en précisant notamment comment ils reliaient notre approche géométrique à l'approche algébrique traditionnelle. La dernière question de la séquence sollicitait un retour réflexif des élèves sur l'ensemble de l'activité. Cette question a été fondamentale dans le processus de recherche de parcours et son analyse nous a permis d'obtenir une première description des parcours effectués par les élèves dans le travail mathématique. Pour décrire le rôle de la géométrisation dans l'approche de la multiplication chez les élèves, nous avons étudié leur manière de résoudre des problèmes de construction géométrique mettant en jeu la multiplication des nombres relatifs, rationnels et complexes.

Les éléments constituant les résultats de l'analyse du travail des élèves en classe de Quatrième nous ont conduit à la restructuration de la séquence d'apprentissage proposée pour cette classe. Etant donné que la situation proposée ne portait plus sur les mêmes objectifs que celle proposée en Terminale S, la recherche des parcours n'a pas pu se produire en classe de Quatrième. La restructuration de la séance expérimentale pour les classes de Quatrième n'est plus une situation de réinvestissement de la multiplication mais une situation de construction du sens d'un objet mathématique. Cette nouvelle séance se situe ainsi au point de départ d'une nouvelle recherche où la médiation sémiotique et sociale sont au cœur de nos propositions didactiques. L'importance des processus de recherche et de la médiation de l'enseignant ne devraient plus être minimisée puisqu'ils sont devenus des éléments fondamentaux pour la construction et la *réification* (Sfard, 2008) de connaissances mathématiques par les élèves.

Or, en classe de Terminale S, les éléments constituant les résultats de nos analyses portent effectivement sur la détermination des parcours d'individus. En reprenant certains de ces éléments résultant de nos analyses, nous pouvons mentionner l'assimilation des connaissances mathématiques préalables et la façon dont ces connaissances ont été mises en œuvre ; les interactions produites entre les composants de l'ETM appropriés par les élèves ; le rôle joué comme signe-artefact ou comme médiateur permettant d'acquérir la formation d'un concept (sens Vygotskian du signe-outil) par la configuration du théorème de Thalès correspondant à la représentation géométrique de la multiplication de Descartes ; l'identification et la différenciation de trajectoires rendant compte de l'origine des genèses.

Notre objectif était d'étudier si les représentations géométriques, données ou demandées, reconnues comme des signes-artefacts, sont capables de renvoyer à un signifié mathématique précis (Falcade, 2002), dans notre cas, la multiplication. Nous avons donc appris les difficultés des élèves pour transposer leurs connaissances à des situations différentes, leur résistance à un nouveau discours théorique, de même que leur attachement à la résolution de problèmes mettant en place des techniques qui suivent un *modèle déjà connu*.

Or, la diversité d'Espaces de Travail Mathématique appropriés de manières différentes nous a permis de déterminer des parcours des élèves où des entrées cognitives se sont effectivement produites. Nous avons ainsi déterminé une mise en relation entre notre signe-artefact et la signification de la multiplication comme une transformation dans le plan, laquelle a bien été observée dans la construction du produit de deux nombres complexes et dans certaines des réponses données à la dernière question.

Néanmoins, nos intentions didactiques nous ont conduit à la conception de séances expérimentales donnant priorité à un travail de collaboration entre élèves ainsi qu'une place limitée aux interventions de l'enseignant. Ce dernier aspect a bien été identifié comme un point à révaluer dans nos propositions didactiques, lequel a rendu difficile la détermination de la compréhension de l'objet mathématique en jeu. Notre situation nous a bien permis d'identifier des *parcours d'action des élèves à l'intérieur d'un espace de travail mathématique* mais dans plusieurs cas, nos analyses ont dû rester au niveau de conjectures puisque nous n'avons pu ni questionner les élèves ni leur faire développer leurs idées.

9.4 Perspectives de recherche

Compte tenu de ce qui précède, et tel que nous l'avons déjà développé dans nos analyses et nos premières conclusions, nous ne pouvons que revenir sur l'importance de concevoir une situation optimale qui permette aux élèves de s'exprimer, de développer leurs pensées et de répondre à leurs questionnements sous une médiation plus active de l'enseignant.

Or, l'intégration expérimentale de la médiation de l'enseignant à l'Espace de Travail Mathématique a ouvert la porte à une série de questionnements portant sur une place *institutionnalisée* de l'enseignant dans le cadre de la théorie des Espaces de Travail Mathématique : pouvons-nous toujours étudier indépendamment l'espace de travail mathématique de l'enseignant et celui des élèves ? Quel est le point de rencontre entre la diversité d'espaces de travail mathématique appropriés par les élèves et l'espace de travail mathématique de l'enseignant ? Comment l'enseignant pourrait-il organiser et unifier la diversité d'espaces de travail mathématique de la classe ? Pourrions-nous parler d'un espace de travail mathématique de la classe établi par l'enseignant ?

Par ailleurs, nous tenons aussi à élaborer davantage la méthodologie expérimentale d'analyse mixte que nous avons mise en place pour orienter *la prise en main* d'une quantité de données significative d'un point de vue qualitatif mais réduite d'un point de vue quantitatif. Or, les résultats obtenus de notre analyse quantitative — mise à l'épreuve des données portant sur des classifications faites à la main en fonction des réponses des élèves données à la dernière question de la séquence — nous a bien donné des pistes intéressantes de réflexion associées à la cohérence des résultats obtenus. Néanmoins, notre hypothèse, qu'une analyse statistique à plus grande échelle pourrait être confiée dans un premier temps à l'information fournie par les arbres de similarité d'un logiciel statistique, reste toujours à vérifier et constitue ainsi un défi à intégrer dans nos futures recherches.

Par rapport à notre expérience dans la conception de séances d'apprentissage, elle a été porteuse d'un travail collaboratif entre chercheur et enseignant. Étant données les contraintes de temps et l'expérience initiale du chercheur, cette collaboration a malheureusement été restreinte. Néanmoins, dans le cadre de nos futures recherches celle-ci est un aspect qui nous intéresse énormément à développer, vu la richesse que même de petits moments de collaboration ont apporté à la phase expérimentale de ce travail de thèse.

Grâce à un processus d'unification et de collaboration, l'enthousiasme et l'expérience des enseignants, ainsi que le regard épistémologique et cognitif du chercheur, constituent un outil fondamental pour l'avancement d'un enseignement effectif et d'un apprentissage significatif des mathématiques.

De ce fait, nous tenons à ce que ce travail collaboratif puisse être approfondi et développé dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants, en promouvant chez les enseignants l'analyse épistémologique des contenus mathématiques fondamentaux et l'analyse de processus cognitifs intervenant dans leur compréhension. La mise en relation de ces analyses devrait favoriser la structuration d'espaces de travail mathématique idoines, que les enseignants pourraient s'approprier d'une façon optimale par les enseignants. En conséquence, leur domaine de connaissance des Espaces de Travail Mathématique favoriserait la prise de conscience du travail des élèves. Leur rôle de médiateur serait préalablement défini, de sorte qu'ils puissent s'intégrer spontanément à l'ETM approprié par les élèves et ainsi construire efficacement un Espace de Travail Mathématique de la classe.

Nous finissons ce travail de thèse en évoquant une conception du processus d'apprentissage-enseignement qui s'est sans doute construit grâce à nos expériences et analyses vécues et développées tout au long de cette recherche :

> *"Arising in the course of sensuous mediated cultural praxes, learning, I argue, is not just about knowing but also about becoming (becoming-someone-with-others). The formulation of learning as*

a cultural and historical process where knowing and being are mutually constitutive leads to a non-utilitarian and a non-instrumentalist conception of the classroom and education. Entrenched in unerasable ethical concerns, the classroom appears as a space for the growth of intersubjectivity and the nurturing of what I call the communal self." Luis Radford

Bibliographie

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 214-241.

Argand, J. R. (1874). *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les construction géométriques*. Paris : Gauthier- Villars.

Artaud, M. (1997, Aout). Introduction à l'approche écologique du didactique. l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In *Actes de la ixe école d'été de didactique des mathématiques.* Rennes : La Pensée Sauvage.

Artigue, M., & Robinet, J. (1982). Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *RDM*, *3*(1), 5-64.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

Balacheff, N. (1982). Preuves et demonstrations au college. *RDM*, *3*(3), 261-304.

Barbin, E. (1997). Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique. *Repères IREM*, *27*, 63-80.

Barrera Curin, R. I. (2009). *Multiplication de fractions au collège : le rôle d'un processus géométrique complémentaire du registre numérique*. Mémoire de Master non publié, Denis Diderot - Paris 7, Paris.

Barrera Curin, R. I. (2011). Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique. *Petit x*, *85*, 5-26.

Barrera Curin, R. I., & Kuzniak, A. (2012). L'analyse statistique implicative : de l'exploratoire au confirmatoire. In (p. 129-144). J.C. Regnier, M. Bailleul and R. Gras. Université de Caen.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artifacts and signs after a vygotskian perspective. In L. E. et al. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2e éd.). New York and London : Routledge.

Bessot, A. (1983). Problèmes de représentation de l'espace. *Bulletin inter-IREM*, *23*, 33-40.

Bkouche, R. (1994). *Autour du théorème de thalès*. Lille : IREM de Lille.

Bkouche, R. (1997). Epistemologie, histoire et enseignement de mathématiques. *For the learning of mathematics*, *17*(1), 34-42.

Bkouche, R. (2009). *Grandeurs et nombres*. Lille : IREM de Lille.

Bkouche, R. (2009b). *Histoire du calcul : de la géométrie à l'algèbre*. Rouen : Vuibert.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en premier scientifique. *R.D.M.*, *19*, 135-193.

Brousseau, G. (1995). Autour de thalès : promenade avec thalès entre la maternelle et l'université. *Brochure de la commission Inter-IREM Premier cycle*, 87-124.

Brousseau, G. (1996). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat non publiée.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bruter, C. P. (2000). *La construction des nombres : histoire et épistémologie*. Ellipses.

Brézinski, C. (2006). *Histoires de sciences : inventions, découvertes et savants*. Paris : L'Harmattan.

Chabert, et al. (1994). *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*. Paris : Belin.

Charlton, T. L. (1996). *An elementary latin dictionary*. Oxford : Oxford University Press.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensé Sauvage.

Chevallard, Y. (2002, Aout). Organiser l'étude : Ecologie et régulation. In Corps (Ed.), *Actes de la 11e ecole d'eté de didactique des mathématiques.* Lieu : La Pensée Sauvage.

Conne, F., & Lemoyne, G. (1999). *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

Couturier, R. (2000, Juin). Traitement de l'analyse statistique dans c.h.i.c. In R. Gras & M. Bailleul (Eds.), *Actes des journées du 1er colloque international sur l'analyse statistique implicative* (p. 33-41). Caen.

D'Amore, B., & Faldino, M. I. (2008, March). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. how other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. In *The first century of the international commission on mathematical instruction (1998-2008) : reflecting and shaping the world of mathematics education.* Rome : Instituto della Enciclopedia Italiana.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching : an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 293-319.

Descartes, R. (1637). *La géométrie* (Par Vincent Jullien éd.). Paris : Presses Universitaires de France.

Dhombres, J. (1987). *Mathématiques au fil des âges*. Paris : Gauthier-Villars.

Dilthey, W. (1992). *Le monde de l'esprit*. Paris : Aubier.

Dorier, J. L. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). *Liaison ecole- collège : Nombres décimaux* (Rapport technique). Paris.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *5*, 37–65.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, *17*, 121–138.

Duval, R. (1998, March). Why to teach geometry ? In *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st. century.* Catania : Springer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization : cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. In M. S. e. F. Hitt (Ed.), *Proceedings of the twenty first annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (p. 3-26). Columbus, OH : ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Duval, R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner : quels apprentissages premiers de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *8*, 13–62.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

Duval, R. (2006b). Transformations de representations semiotiques et demarches de pensée en mathématiques. In *Actes du xxxiie colloque copirelem* (p. 67–89). IREM de Strasbourg.

Duval, R. (2006c). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, *Numero Especial*, 45–81.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education ; epistemology, history, classroom and culture* (Vol. 1). Rotterdam : Sense Publishers.

Evan-Pritchard, E. (1937). *Witchcraft, oracles and magic among the azande*. Oxford : Clarendon.

Falcade, R. (2002). Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe de fonction. *Petit x*, *58*, 47–81.

Falcade, R. (2006). *Théorie de situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Thèse de doctorat non publiée.

Fano, G., & Carrus, S. (2007). Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le xixe siècle. In *Encyclopédie des sciences* *mathématiques pures et appliquées* (Vol. III, p. 185-259). Jacques Gabay.

Flament, D. (2003). *Histoire des nombres complexes. entre algèbre et géométrie*. CNRS Editions.

Freudenthal, H. (2003). *Didactical phenomenology of mathematics structures*. Springer.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie de nombres relatifs. *RDM*, *2*(3), 303-346.

Gras, R. (1991). Implication statistique, une application en didactique des mathématiques. In *Actes des xxiiièmes journées de statistiques de strasbourg.* Euro-Congrès U.L.P. Ed.

Hankel, H. (1867). *Theorie der complexen zahlensysteme*. Leipzig.

Herodote. (109). *L'enquete livre ii p. 183*.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Van Dor Molen, J. (1996). Space and shape. In A. B. et al (eds.) (Ed.), *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, p. 161-204). Rotterdam : Kluwer.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1996). Learning and teaching with understanding. In D. Grows (Ed.), *Handbook of research in teaching and learning* (p. 65-97). New York : Macmillan.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *8*, 255-271.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspiré de gonseth et déstiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(1), 89-116.

Ifrah, G. (2003). *Histoire universelle des chiffres : l'intelligence des hommes racontée par le nombres et le calcul.* Robert Laffont.

Jablonka, E., & Gellert, U. (2007). Mathematisation-demathematisation. In U. . J. E. Gellert (Ed.), *Mathematisation and demathematisation : Social, philosophical and educational ramifications.* Rotterdam : Sense Publishers.

Kant, I. (1781-1996). *Critique of pure reason* (translated by W. Pluhar éd.). Indianapolis : Hackett.

Kant, I. (1790). *The critique of judgment* (translated by James Creed Meredith éd.). Retrieved from : http ://etext.library.adelaide.edu.au/aut/.

Kellert, O. (2006). *La figure et le monde, une archeologie de la géométrie*. Paris : Vuibert.

Kilhamn, C. (2011). *Making sens of negative numbers*. Thèse de doctorat non publiée.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en france. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *15*, 73-93.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématiques et ses genèses. In *Actes du symposium franco-chipriote de didactique espace de travail mathématique.* Paris.

Kuzniak, A. (2012). Understanding geometric work through its development and its transformations. In S. Rezat & M. Hattermann (Eds.), . Berlin : Springer. À apparaître.

Kuzniak, A., & Houdement, C. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *11*, 175-193.

Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches on geometrical work relate to geometry students learning difficulties ? *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 129-147.

Lakoff, G., & Nunez, E. (1897). *Where mathematics comes from : How the embodied mind brings mathematics into being*. New York : Basic Books.

Lakoff, G., & Nunez, E. (1997). The metaphorical structure of mathematics : Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In L. D. E. English (Ed.), *Mathematical reasoning : Analogies, metaphors, and images.studies in mathematical thinking and learning* (p. 21-89). Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Leinster, T. (2003). *Higher operads, higher categories* (L. M. S. L. N. Series, Ed.). Cambridge : Cambridge University Press.

Leys, J., Ghys, E., & Alvarez, A. (s. d.). *Dimensions*.

Lévi-Strauss, C. (1962). *La pensée sauvage*. Paris : Plon.

Mabry, R. (1999). Proof without words : $(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + ... \approx \frac{1}{3}$. *Mathematics magazine*, *72*(1), 63.

Maclaurin, C. (1742). *A treatise of fluxions*. Edinburgh : W.H. Freeman and Company.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners : Attention, awareness, and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. In T. W. (Series) & B. J. (Vol.) (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, p. 31-56). Rotterdam : Sense Publishers.

Mayer, R. (1983). *Thinking, solving problems, cognition*. New York : W.H. Freeman and Company.

Newton, I. (1740). *Méthode des fluxions et des suites infinies* (traduction par M. Buffon éd.). Paris : Debure l'ainé.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings : Learning cultures and computers*. Dordrecht : Kluwer.

Panoura, A., Elia, I., Gagatsis, A., & Glatilis, G. (2007). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. In *International journal of mathematical education in science and technology* (Vol. 37, p. 681-706). Taylor and Francis Online.

Perrin, M. J. (2003, Mai). Vingt ans de didactique en 1993 ! où en est-on dix ans après ? In *Actes du xxxème colloque national des professeurs et formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. trente ans d'activités de la copirelem au service de la formation des maîtres :*

acquis et perspectives. Avignon : IREM de Marseille.

Piaget, J. (1949). *Introduction a l'épistémologie génétique : la pensée mathématique, tome 1.* Paris : Presses Universitaires de France.

Presmeg, N. (2002). Beliefs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practices. In G. T. G.C. Leder E. Pehknonen (Ed.), *Beliefs : A hidden variable in mathematics education ?* (p. 293-312). Dordrecht : Kluwer.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In P. B. A. Gutierrez (Ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education : Past, present and future* (p. 205-236). Rotterdam : Sense Publishers.

Programmes officiels, E. (2001). *Bulletin officiel n°4, du 30 août 2001.*

Programmes officiels, E. (2006). *Document d'accompagnement : Les nombres au collège.*

Programmes officiels, E. (2007a). *Document d'accompagnement : Grandeurs et mesures au collège.*

Programmes officiels, E. (2007b). *Document d'accompagnement : Le calcul numérique au collège.*

Programmes officiels, E. (2008). *Bulletin officiel spécial n° 6, du 28 août 2008.*

Programmes officiels, E. (2011). *Bulletin officiel spécial n° 8, du 13 octobre 2011.*

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies.* Paris : Armand Colin.

Rabardel, P., & Samurçay, R. (2001, March). From artifact to instrumented-mediated learning, new challenges to research on learning. In *International symposium organized by the center for activity theory and developmental work research.* Helsinski : University of Helsinki.

Radford, L. (2000). Signs and meanings of students' emergent algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 237-268.

Radford, L. (2003). The semiotics of schema. In F. S. M. H. G. Hoffmann J. Lenhard (Ed.), *Activity and signs : Grounding mathematics education* (p. 137-152). Netherlands : Springer US.

Radford, L. (2003b). Gestures, speech, and the sprouting of sings : A semiotic-cultural approach to students'types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In A. G. (ed.) (Ed.), *Atti del convegno di didattica della matematica* (p. 11-27). Locarno : Alta Scuola Pedagogica.

Reins, K. (s. d.). *Realistic mathematics education (rme).*

Reyneau, C. R. (1739). *Science du calcul des grandeurs en general.* Venise : Chez F. Pitteri.

Ribeiro, R. (1997). On the epistemology of integers. *RDM*, *17*(2), 211-250.

Rønning, F. (2011, Febrary). *Epistemological and semiotic issues related to the concept of symmetry.* Rzeszów.

Robert, A. (2008). Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 137-152). Toulouse : Octares.

Saint Martin, F. (2007). *Le sens du langage visuel : essai de sémantique visuelle psychanalytique*. Quebec : Presses de l'Université de Quebec.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 44-55.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating : Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge : Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (1991). *Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique* (Rapport technique). Thessalonique : Institut Français de Thessalonique.

Soto-Andrade, J., & Reyes-Santander, P. (2011, Febrary). *Conceptual metaphors and grundvorstellungen : A case of convergence.* Rzeszów.

Tanguay, D. (2000). Une image vaut mille mots. *Bulletin AQM*, *XL*(1), 14-19.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. a model of goal and theory description in mathematics instruction. the wiskobas project*. Dordrecht : D. Reidel.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. *Realistic Mathematics Education in Primary School*, 21-57.

Vergnioux, A. (2003). *L'explication dans les sciences*. Bruxelles : De Boeck et Larcier s.a.

Vitrac, B. (1994). *Euclide, les éléments*. Paris : P. U. de France.

Vygotsky, L. S. (1931/1978). *Mind in society. the development of higher psychological processes*. Cambridge : Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1934/1997). *Pensée et langage* (3ème éd.). Paris : La Dispute.

Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In . V. W. (Ed.) (Ed.), *The concept of activity in soviet psychology*. Armonk, NY : Sharpe.

Walkerdine, V. (1990). *Mastery of reason : cognitive development and the production of rationality*. London : Routledge.

Wertsch, J. V., & Addison Stone, C. (1995). The concept of internalization in vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition : Vygotskian perspectives.* Cambridge : Cambridge University Press.

Wessel, C. (1897). *Essai sur la représentation analytique de la direction* (Traduction française de H.G. Zeuthen éd. ; B. Luno, Ed.). Copenhague : l'Académie royale des sciences et des lettres de Danemark.

Winsløw, C. (2003). Semiotic and discursive variables in cas-based didactical engineering. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 271-288.

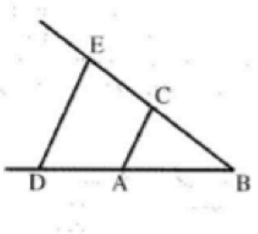
Annexe A

Le questionnaire diagnostique

Questionnaire
Classe de Terminale S
Mars 2011

Observez les représentations géométriques, lisez les informations et répondez aux questions :

1. Voici un texte de Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) qui explique comment trouver le produit des deux longueurs *BD* et *BC*.



Soit par exemple *AB* l'unité et qu'il faille multiplier *BD* par *BC* ; je n'ai qu'à joindre les points *A* et *C*, puis tirer la parallèle à *CA*, et *BE* est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).

   a. Supposons que l'unité *AB* soit égale à 1 cm. Justifier que $BD \times BC = BE$.

   b. Représenter géométriquement cette multiplication dans le cas où $0 < BD < 1$.

Figure A.1 – Questionnaire page 1

Questionnaire
Classe de Terminale S
Mars 2011

c. Comment interpréter l'égalité $\overrightarrow{BD} = k \times \overrightarrow{BA}$ dans les deux cas suivantes :

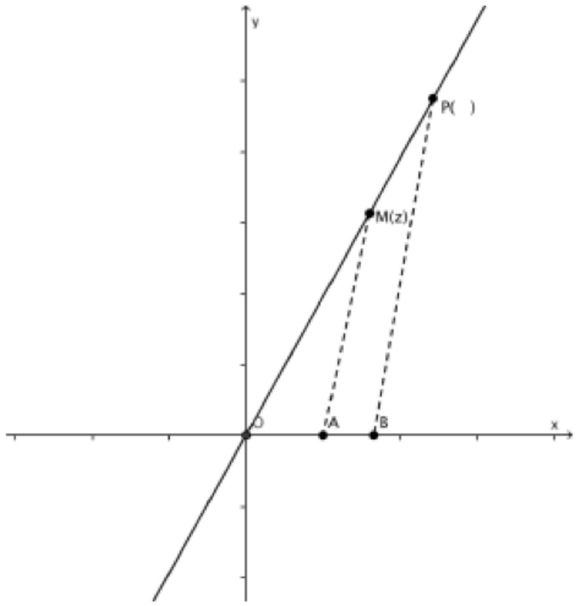
- Premier cas : k est un réel positif.
- Deuxième cas : k est un réel négatif.

d. En prenant en compte le deuxième cas ci-dessus, représenter géométriquement $BD \times BC = BE$.

Figure A.2 – Questionnaire page 2

Questionnaire
Classe de Terminale S
Mars 2011

2. **Observez la figure et répondez aux questions suivantes :**



Dans cette figure (AM) et (BP) sont parallèles (*A d'abscisse 1 et B d'abscisse k*), M a pour affixe z :

a. Donner la relation entre les affixes de M et P.

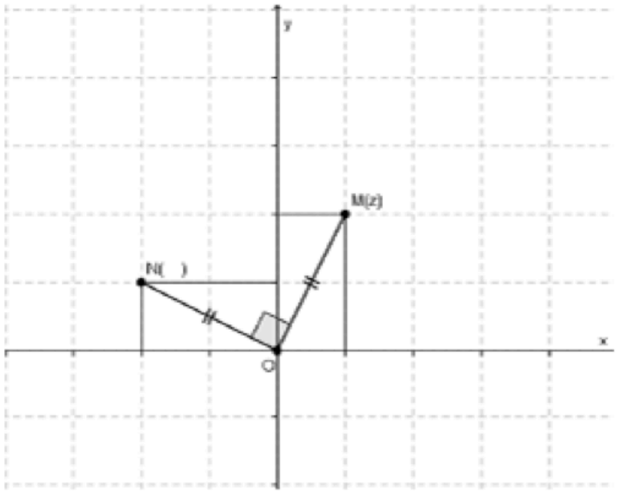
b. Déterminer l'affixe du point P en fonction de z, sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.

c. Justifier votre réponse.

Figure A.3 – Questionnaire page 3

Questionnaire
Classe de Terminale S
Mars 2011

3. Considérons que z est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



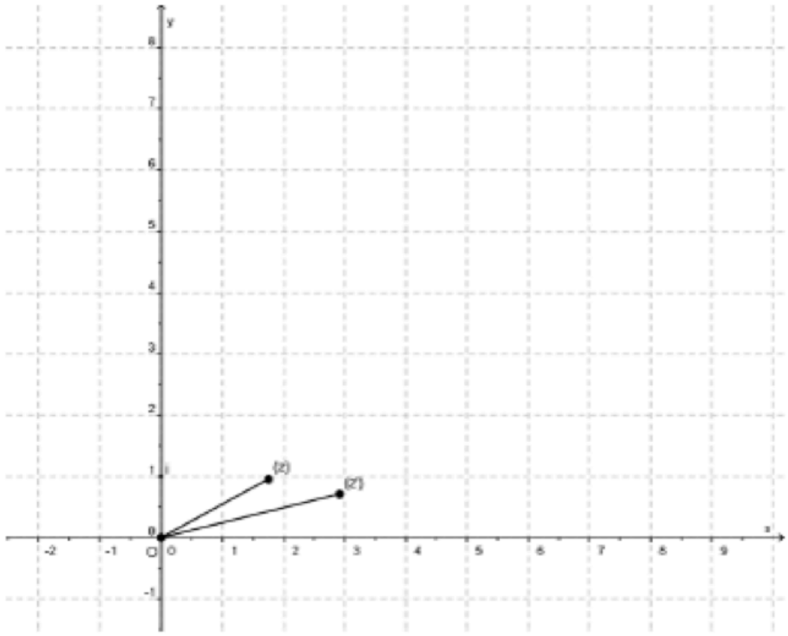
a. Déterminer l'affixe du point N en fonction de z.

b. Justifier votre réponse.

Figure A.4 – Questionnaire page 4

Questionnaire
Classe de Terminale S
Mars 2011

3. Soient deux nombres complexes z et z' tels que :
   $|z| = 2$ et
   $|z'| = 3$



a. Dessiner $z + z'$

b. Dessiner $z \times z'$

c. Expliquer vos constructions.

Figure A.5 – Questionnaire page 5

Questionnaire
Classe de Terminale S
Mars 2011

4. Considérez les fractions suivantes comme des longueurs :
   a. Représenter géométriquement les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ comme des longueurs l et l'.
   b. Expliquer les différences et les ressemblances entre $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$ et $l \times l'$ (l'explication peut s'appuyer sur une figure).

Figure A.6 – Questionnaire page 6

Annexe B

Le questionnaire : description et analyse

B.1 Introduction

Nous tenons à ce que l'analyse du questionnaire et des réponses des élèves nous permette :

– Premièrement, l'identification de l'existence d'une assimilation des connaissances mathématiques préalables ;
– deuxièmement, la détermination du comportement cognitif des élèves associé au rôle attribué aux représentations géométriques, à l'intérieur d'une situation visant la compréhension d'un objet mathématique à travers des interactions entre différents registres de représentation ;
– troisièmement, l'acquisition d'information pertinente concernant les liens établis entre la formulation des questions, les objectifs visés et la compréhension des élèves comme un outil essentiel pour l'élaboration postérieur des séquences d'apprentissage visant la construction de la signification géométrique de la multiplication des nombres relatifs et complexes.

D'abord, nous allons présenter l'analyse *a priori* du questionnaire, en commençant par la description des choix dans sa construction, c'est-à-dire les *pourquois* des questions posées, du départ par la multiplication de Descartes, de l'ordre de questions ainsi que de la composition de chacune. En outre, nous présenterons une description des réponses attendues, leurs analyses, les réponses des élèves et les liens établis entre l'analyse *a priori* et *a posteriori*.

B.2 Sur les questions choisies : le départ par la multiplication de Descartes, ordre et interrelations

Comme nous l'avons déjà dit, c'est grâce à notre étude historique et épistémologique ainsi qu'à l'étude des programmes officiels (cf. Chapitre 3) pour les classes scientifiques que nous nous sommes motivés à l'utilisation d'un texte historique dans la construction du questionnaire. Spécifiquement, le lien entre le produit de Descartes et la représentation de la multiplication de deux nombres complexes proposée par Carl Wessel (Flament, 2003) a précisé cette décision.

Tout au début du questionnaire, l'analyse du produit de Descartes et de sa représentation géométrique correspondant à une des configuration du théorème de Thalès, vise à ce que les élèves puissent justifier des affirmations et de conjecturer par rapport à l'information donnée dans chacun des énoncés. De ce fait et plus spécifiquement, nous voudrions d'un côté, identifier la disponibilité (Robert, 2008) et/ou l'accès à des réponses mettant en évidence certaines transformations géométriques comme l'homothétie et la rotation, et d'un autre côté, déterminer la transférabilité de la proportionnalité sous-jacente au théorème de Thalès à des questions portant sur la représentation géométrique du produit.

Il nous semble important de mentionner l'importance du théorème de Thalès dans les programmes officiels français. Pour cela il vient à remplir un rôle particulier : celui de favoriser l'entrée à cette situation d'apprentissage *non-ordinaire*, ce qui correspond à ce que nous identifions comme une stratégie de rapprochement du nouveau inconnu à travers le connu ancien.

En outre, la construction géométrique (Duval, 2005) est présent du début à la fin du questionnaire. Ceci étant donné notre intérêt aux connaissances des élèves leur permettant d'établir un lien entre la multiplication numérique ou algébrique et leurs significations à travers la géométrie. De ce fait, nous avons demandé explicitement la représentation de la multiplication du rapport entre deux longueurs, entre un vecteur et un entier négatif et finalement entre deux nombres complexes quelconques. Toutes les questions, sauf la dernière, demandent de justifier les relations établies entre les composantes d'une configuration géométrique et de certaines égalités algébriques ou numériques qui ont été proposées. Les données numériques, n'ont pas une autre fonction que celle d'orienter les réponses des élèves dans un registre géométrique ou algébrique, toujours en cherchant des justifications géométriques.

Les questions ont été présentées dans l'ordre donné de sorte que les élèves puissent être orientés vers les réponses attendues. Ainsi, le travail en fonction de la représentation géométrique du produit de Descartes devient essentiel, étant donné que nous attendons, à partir de son analyse dans la première question, de faciliter la visualisation de la même configuration située quelques questions plus tard dans le plan complexe. Ainsi, les connaissances mises en œuvre dans la première question constitueront une partie importante des procédures et des justifications à utiliser tout au long du questionnaire. Par exemple, dans la quatrième question, nous tenons à ce que les élèves puissent exprimer leurs possibilités de représenter géométriquement la multiplication de nombres complexes en faisant appel aux propriétés apprises dans leur cours (multiplication de modules et somme des arguments). Par contre, si ces propriétés n'ont pas encore été apprises, il y aura toujours la possibilité de rendre possible cette géométrisation à travers des constructions qui prennent en compte les procédures découvertes ou mises en place dans les questions précédentes.

Pour terminer, la question cinq vise deux réponses. La première est directement liée au produit de Descartes, nous continuons donc dans le fil conducteur du questionnaire. Par contre, une autre possibilité est aussi prévue, où le produit peut être représenté comme une opération externe : la multiplication de deux longueurs équivaut à l'aire d'une surface. Nous considérons cette dernière question comme la plus expérimentale, ceci car nous prétendons d'une part, reprendre et résumer tout ce qui a été travaillé au cours du questionnaire, et d'autre part, faire sortir les élèves du contexte unidimensionnel des représentations géométriques de la multiplication, vers l'expression de la représentation géométrique d'un produit externe mais également lié aux autres en termes de signification : le produit est toujours une transformation dans le plan.

B.2.1 Sur l'information fournie dans les énonces de chaque question et le rôle des figures

Tout d'abord, nous avons à dire que les trois premières figures « servent de support à l'intuition au cours de la recherche en faisant apparaître sur un objet visible des relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal » (Bessot, 1983, p. 35). Cela ne veut pas dire non plus que ces relations soient évidentes dans les figures en question. De ce fait, nous allons analyser les registres en jeu, ainsi que le contenu et les codages faisant partie de chacune de nos représentations afin de déterminer leurs possibilités d'être un support de raisonnement pour les élèves (Kuzniak & Houdement, 2006).

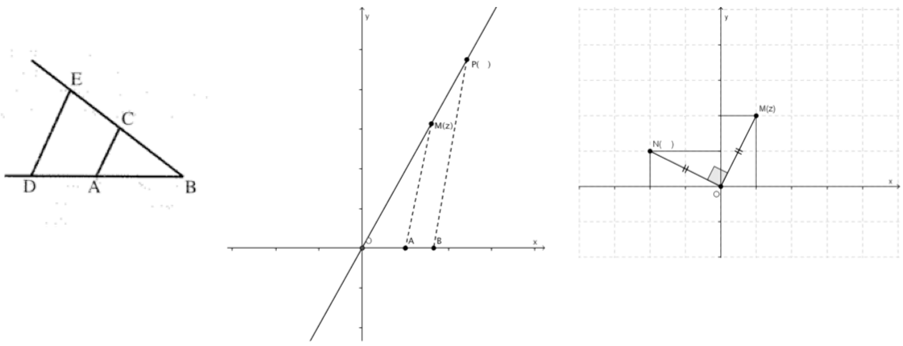


Figure B.1 – Configurations géométriques du questionnaire

Parler de la composition des figures correspond plutôt à une description de figures comme des représentations sémiotiques. Un point essentiel dans cette analyse est qu'elles ne peuvent pas être analysées en termes de ressemblance avec les objets qu'elles représentent (Duval, 2006b). Nous considérons donc que toutes les figures géométriques en question n'ont qu'un lien référentiel des objets mathématiques représentés (Duval, 2003).

Chaque figure est potentiellement une représentation *non iconique*, dont le contenu correspond à des unités figurales telles que des lignes droites et des segments qui donnent lieu, dans les deux premier cas, à une configuration du théorème de Thalès. Ces unités ont été mises en relation à partir des propriétés de construction préétablies dans la multiplication de Descartes. Des lettres désignant des points et des segments sur les droites sont des codages sur la figure qui font appel à ce qui est mentionné, précisé, décrit ou demandé dans les énoncés.

D'après le traitement attendu, toutes les figures peuvent être situées dans le cadre de la Géométrie II (Kuzniak, 2004) et elles correspondent à des configurations qui peuvent être situées ou non dans un plan orthonormé.

Dans la première question, la multiplication de Descartes, décrite dans un texte historique, a été représentée géométriquement à travers une configuration déjà connue par les élèves comme une des configurations du théorème de Thales.

Le fait que cette configuration ait été choisie comme le point de départ du questionnaire a une relation directe avec les possibilités d'analyse que ses composantes permettraient de déclencher : les relations de proportionnalité entre les segments et les droites, le rapport à la colinéarité de segments, ainsi que les relations qu'elle permet d'établir et qui sont liées aux transformations dans le plan, comme l'homothétie et la rotation. Dans ce contexte, la figure est un support de raisonnement qui donne du sens à l'énoncé (Kuzniak, 2004) et qui favorise la mobilisation de connaissances mathématiques, qui seront des outils de résolution aux questions posées tout au long du questionnaire.

Dans la deuxième question une configuration similaire à celle de la première question a été située dans le plan complexe. Elle a été définie par un énoncé qui rend compte de son contenu. Dans les deux cas, un enjeu entre deux registres de représentations sémiotiques a été clairement mis en place : le registre figural et le registre discursif (Duval, 2006b). La figure donnée vise la mise en fonctionnement d'un processus cognitif de visualisation qui permettrait l'accès aux réponses correspondantes aux transformations géométriques.

A travers la troisième configuration, nous voudrions rendre visible une relation géométrique entre deux nombres complexes : l'un est produit par la rotation de l'autre dans 90 degrés. Ceci correspond à l'enjeu géométrique central du questionnaire, puisque la représentation en question possède les informations nécessaires pour reconnaître que le produit d'un nombre quelconque par i correspond à une rotation de 90 degrés. L'angle de rotation et l'égalité des modules sont donnés sur la figure à travers un discours superposé. Ce choix, prétend guider une manière de regarder la figure. Une appréhension discursive (Duval, 1994) devrait être mise en place à partir des informations fournies sur la représentation géométrique en question. Un angle et des segments égaux seraient les éléments qui pourraient faire appel à certaines propriétés déjà apprises sur la multiplication de nombres complexes. Le regard sur cette construction géométrique devrait être centré sur les composantes de la configuration décrites ci-dessus.

Dans la quatrième question, deux segments ont été placés dans le plan complexe comme des représentants des modules de deux nombres complexes. Cette représentation ne comporte aucune propriété ou information indiquant le processus à suivre. Elle n'est que la base d'une construction à mettre en place par les élèves. Cette construction devrait se rendre possible en faisant appel, d'une part, aux connaissances mathématiques déjà apprises portant sur l'addition et la multiplication de nombres complexes et, d'autre part, aux techniques requises par les instruments de construction à disposition (Duval, 1994). De ce fait, nous tenons à ce que l'élève puisse modifier une base figurale donnée. Aucune précision n'a été donnée par rapport aux instruments de construction géométrique à utiliser.

Finalement, dans la dernière question, la figure ou configuration figurale n'a pas été donnée mais demandée. La question *5.a* a l'intention de contextualiser géométriquement les nombres rationnels donnés. Dans la question *5.b*, ce qui est intéressant est que pour expliquer des différences et des ressemblances entre la multiplication de deux fractions et la multiplication de deux longueurs, il faudra, comme point de départ, *une idée* de ce qui représente le produit de deux fractions. Une de ces idées peut être associé à une signification purement numérique rendant compte d'une valeur, nombre, inférieur à l'unité. Une autre idée pourrait plutôt correspondre à une *image métaphorique* d'un produit inférieur à l'unité, lequel pourrait être visualisé et représenté, soit comme le produit de deux longueurs restant un longueur, soit comme un produit de deux longueurs correspondant à une partie de l'aire d'une surface quelconque. De ce fait, le choix d'une figure pour expliquer des différences et des ressemblances pourrait rendre compte du sens du produit prédominant chez les élèves, ainsi que de leurs possibilités d'établir un lien avec la multiplication de Descartes travaillée dans les questions précédentes.

Compte tenu de ce qui précède nous tenons à ce que la figure remplisse un rôle fonctionnel (Hitt, 2003) étant un moyen qui permettra aux élèves, d'une part, de s'exprimer quant à un ou plusieurs sens de la multiplication et, d'autre part, de construire du sens grâce à leurs possibilités cognitives de traiter ou de convertir des objets mathématiques à travers un changement de registre de représentation sémiotique.

B.3 Analyse de réponses des élèves

L'analyse du questionnaire dont nous rendrons compte sera constituée de trois parties, lesquelles ont déjà été décrites dans 5.1.1 :

– Réponses attendues et leurs analyses respectives.
– Tableau de classification des réponses attendues.
– Réponses des élèves et leurs analyses respectives.

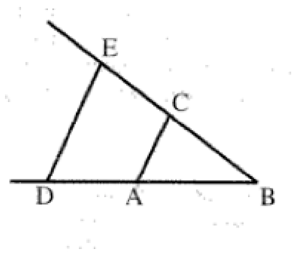
Le fait d'étudier d'une façon si spécifique le travail de certains élèves nous a permis de constater des comportements qui ne sont pas du tout isolés. Nous avons identifié, d'une part, comme nous le montrons dans les tableaux *résumé de réponses des élèves*, une quantité considérable des réponses correspondantes, au moins en partie, à nos attentes et, d'autre part, des régularités dans l'interprétation de certaines consignes. Nous avons donc essayé de rendre compte non seulement des "réponses correctes" mais de celles qui nous semblent significatives nous permettant d'identifier certains comportements en commun mettant en relation figure et énoncé à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique personnel.

Comme nous l'avons déjà dit, les conclusion obtenues par rapport aux résultats de cette première expérimentation seront le point de départ de la deuxième partie de la phase expérimentale de notre recherche.

Réponses attendues et leurs analyses respectives

QUESTION 1 : ENONCE

Voici un texte de Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) qui explique comment trouver le produit des deux longueurs BD et BC.



Soit par exemple AB l'unité et qu'il faille multiplier BD par BC ; je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer la parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).

QUESTION 1.a : Supposons que l'unité AB soit égale à 1 cm. Justifier que $BD \times BC = BE$.

Réponse A

On considère AB l'unité en centimètres. La représentation de la multiplication de Descartes correspond à une configuration du théorème de Thalès.

On sait que :

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BD}$$

D'où,

$$AB \times BE = BC \times BD$$

Pour que l'égalité donnée soit vraie, on considère qu'elle doit correspondre au rapport entre longueurs. Ainsi,

$$\frac{BE}{1} = \frac{BC}{1} \times \frac{BD}{1}$$

Donc, d'après le théorème de Thalès,

$$BE = BC \times BD$$

Analyse globale de la tâche et première réponse attendue

Le contenu de la figure donnée dans l'énoncé correspond à des unités figurales telles que des lignes droites et des segments qui donnent lieu à une configuration du théorème de Thalès. Ces unités ont été mises en relation à partir de propriétés de construction préétablies dans la multiplication de Descartes donnée dans l'énoncé. Les lettres désignant des points et des segments sur les droites sont des codages sur la figure qui font appel à ce qui a été mentionné, précisé, décrit ou demandé dans l'énoncé. Par contre, la figure, potentiellement iconique, reste générique puisqu'elle ne porte pas, sur elle-même, des informations complémentaires qui la caractérisent comme une figure spécifique, contextualisée ou mesurée. Néanmoins, cette figure, est bien un support de raisonnement à partir de la mise en place des propriétés auxquelles elle fait référence. Ainsi, la reconnaissance de cet *icône* de Thalès constitue le point de départ de la première réponse attendue, de manière à ce que la demande de justifier l'égalité $BD \times BC = BE$ soit prise en compte par la mise en œuvre du théorème de Thalès. La mise en relation de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes et du théorème de Thalès met en évidence l'existence de deux processus cognitifs prédominants : la visualisation et la preuve. Ces deux processus vont s'enchaîner dans la construction de la réponse et le premier devrait donner lieu au deuxième. De ce fait, les procédures de résolution portent sur des connaissances mathématiques mobilisées par la reconnaissance d'une configuration du théorème de Thalès. Cette connaissance deviendra l'outil technologique (Chevallard, 1985) qui va prouver l'assertion donnée par Descartes.

Compte tenue de ce qui précède, le traitement de la tâche implique un enjeu entre plusieurs registres de représentation (Duval, 2006b) lequel est mis en évidence par le passage d'une reconnaissance visuelle d'une configuration du théorème de Thalès à une procédure algébrique rendant compte de la proportionnalité sous-jacente à cette configuration et qui va permettre sa justification.

Par ailleurs, la tâche demandée devient plus complexe à cause de l'inclusion d'un élément externe à la multiplication de Descartes : l'unité fixé en centimètres. Cet élément, implique un traitement mathématique adéquat pour comprendre le fait que le produit de deux longueurs d'unité $1cm$ ne corresponde pas à des centimètres carrés. Ainsi, nous multiplions des grandeurs du même type en proposant que le produit restera aussi une longueur. Sachant que ceci est physiquement impossible, nous trouvons une réponse mathématique à travers laquelle nous considérons que l'égalité donnée correspond spécifiquement au rapport entre deux longueurs. De ce fait, le produit en cm^2 ne correspond pas à une réponse attendue.

Réponse B

On mesure AB sur la figure. Pour $AB = 1$ ou $AB \neq 1$ on vérifie numériquement le produit en utilisant les proportions, c'est-à-dire, division par AB de toutes les longueurs mesurés.

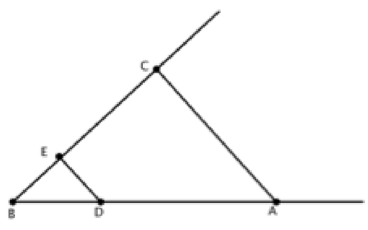
Analyse

Dans l'énoncé, il est donné seulement une valeur numérique ainsi qu'un lien entre cette valeur (l'unité) et une grandeur déterminée. La reconnaissance d'une configuration du théorème de Thalès et la consigne de justifier un produit, pourraient amener les élèves à agir sur la figure, en la rapprochant d'un contexte calculatoire plus concret : mesurer les longueurs et tester le produit.

Ce raisonnement qui leur permettrait de valider leurs hypothèses « dans un champ d'expérience lié au monde sensible avec des outils de mesurage » (Houdement & Kuzniak, 1999, p. 6) nous permettrait de déterminer si la figure est reconnue ou non comme une généralisation de la multiplication de Descartes, laquelle il faudra démontrer à travers l'étude de cas particuliers. De ce fait, les élèves vont s'appuyer dans des procédures en GI telles que mesurer les longueurs. Cette procédure devrait être suivie d'une mise en relation, par proportionnalité, entre les mesures obtenues pour finalement valider ou non les propriétés justifiant la configuration figurale donnée. Dans cette réponse la preuve s'appuie, premièrement, dans la reconnaissance d'une configuration du théorème de Thales et, deuxièmement, dans l'expérience sensible de la mesure.

QUESTION 1.b : Représenter géométriquement cette multiplication dans le cas où $0 < BD < 1$.

Réponse A



Analyse

Dans cette question, nous demandons une représentation géométrique de la multiplication de deux longueurs où un des facteurs est inférieur à l'unité : on considère la longueur BD comme une fraction de l'unité AB, c'est-à-dire, le point D est placé entre les points B et A. De ce fait, on n'a qu'à reprendre l'exemple de la multiplication de Descartes en changeant les longueurs des segments sur la figure. Ainsi, d'après les informations fournies dans l'énoncé, nous complétons la représentation en joignant les points A et C. Finalement, la parallèle passant par D nous donne le placement du point E.

Ceci dit, nous tenons à ce que les élèves puissent établir un lien avec la question précédente en proposant une configuration correspondante dans son contenu mais avec des mesures différentes dont une d'entre elles a été prédéterminée : un des facteurs doit être inférieur à l'unité. La validité de la configuration géométrique de la multiplication de Descartes par le théorème de Thalès leur permettra de vérifier la stabilité de la représentation et pourtant de la reproduire dans le cas où $0 < BD < 1$.

Construction et preuve sont les procédures cognitives visées. La complexité cognitive de cette tache consiste au passage entre différents registres de représentations : d'abord une interprétation de l'énoncé en identifiant les éléments constituant la multiplication dans le registre discursif. Ensuite, la mise en correspondance entre les éléments mentionnés dans la description de Descartes et la représentation géométrique proposée. Finalement et idéalement, le passage à un registre algébrique pour justifier la multiplication de Descartes à l'aide du théorème de Thalès.

Réponse B

On considère $AB = 1cm$ et on choisi des mesures pour BC et pour BD toujours en prenant en compte que $0 < BD < 1$. On trace la figure puis on calcule numériquement $BD \times BC = BE$. On reporte cette mesure sur la figure et l'on place$E$.

Analyse

Cette réponse correspond à une représentation géométrique spécifique dont la genèse n'est pas située dans un registre de représentation géométrique. Elle est plutôt liée à une réponse B dans la question *1.a* puisque nous allons recourir à un traitement numérique des données : chaque longueur portera une mesure. Cette mesure sera d'abord prise en compte dans un registre numérique puis transférée à la configuration géométrique en situant les points qui rendront compte des segments multipliés.

Ce traitement de l'information ne requiert pas une simple transposition des droites parallèles mentionnées par Descartes dans l'énoncé. Ceci puisque le calcul numérique puis le report de longueurs exige comme minimum l'identification préalable des côtés proportionnels dans la figure : nous faisons le calcul, nous reportons les mesures dans une figure de base ayant seulement les points B, A et C déjà placés.

Question 1.c : Comment interpréter l'égalité $\overrightarrow{BD} = k \times \overrightarrow{BA}$ dans les deux cas suivants :

Premier cas : k est un réel positif.

Deuxième cas : k est un réel négatif.

Réponse A

Pour le premier cas, si on interprète $\overrightarrow{BD}$ comme un agrandissement ou bien comme une réduction du $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BA}$ et donc l'image de $\overrightarrow{BA}$ par l'homothétie de rapport k réel positif.

Pour le deuxième cas, on identifie aussi $\overrightarrow{BD}$ comme un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{BA}$. Il correspond à un agrandissement ou à une réduction du vecteur $\overrightarrow{BA}$ mais dans le sens opposé. Donc $\overrightarrow{BD}$ est aussi l'image de $\overrightarrow{BA}$ par l'homothétie de rapport k réel négatif.

Analyse

Dans cette réponse nous sommes sortis de la réalité des longueurs en centimètres et nous avons présenté une égalité représentant des vecteurs colinéaires. L'importance de cette question est constituée par son rôle de *face intermédiaire* entre la multiplication des longueurs de Descartes (déterminée par l'unité) et la multiplication des nombres complexes. Dans l'énoncé de cette question, nous avons déconstruit la figure de départ jusqu'à la transformer en une description de deux vecteurs colinéaires : $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}$.

La question est ouverte et la demande d'interpréter cette égalité poursuit l'établissement d'hypothèses faisant appel à l'homothétie en explicitant si la transformation correspondant consiste à agrandir ou à réduire le vecteur BA. Ainsi, nous visons à identifier la disponibilité de cette transformation géométrique, laquelle a normalement été travaillée en classe de Première S.

L'interprétation de l'expression $\overrightarrow{BD} = k \times \overrightarrow{BA}$ comme une transformation géométrique, permettra l'accès à une réponse géométrique à la question *1.d*.

Réponse B

Dans la première égalité le vecteur BD a le même sens que le vecteur BA. Dans la deuxième égalité le vecteur BD a le sens contraire à BA.

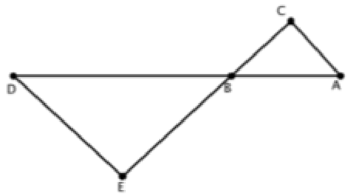
Analyse

Cette réponse, est une version simplifiée de la précédente. Dans ce cas, nous mettons en place des définitions apprises par rapport à la colinéarité de vecteurs, lesquelles pourraient être reconnues par les élèves par la seule lecture des égalités données dans l'énoncé.

Compte tenue de ce qui précède, une réponse de ce type ne nous permettra pas d'identifier si les élèves peuvent associer des transformations géométriques à une situation de colinéarité. Ceci, puisque la réponse ne fait pas appel à la longueur du vecteur BD par rapport au vecteur BA. Par contre, l'analyse de cette réponse sera complémentée par celle de la réponse à la question *1.d*. Plus précisément, cette réponse pourrait être validée si dans la question *1.d* la seule réponse attendue est bien mise en place par les élèves.

Question 1.d : En prenant en compte le deuxième cas ci-dessus, représenter géométriquement $BD \times BC = BE$.

Réponse A



Analyse

Ce traitement dépend de la mise en œuvre des propriétés déjà appliquées pour répondre à la question précédente. Notamment, la possibilité d'associer à une homothétie l'égalité $BD \times BC = BE$ avec k réel négatif, permettra le traitement figural pertinent qui donnera lieu à cette réponse attendue : la configuration de Thalès, dite du papillon. Nous précisons que le fait d'associer cette égalité à une transformation déterminée pourrait bien se produire d'une façon explicite, telle que la réponse A à la question *1.c* l'indique, ou bien, d'une façon implicite. Ce qui veut dire : réponse B pour *1.c* et réponse A pour *1.d*.

Dans cette question, la représentation géométrique de la multiplication de longueurs proposée par Descartes est encore valable et une justification par le théorème de Thalès est toujours possible si les élèves prennent en compte la proportionnalité des segments constituant la configuration. Par contre, en étant BD un rapport négatif, cette égalité ne correspond plus au rapport entre longueurs. A partir de maintenant, les élèves ne devraient parler plus de segments. Ils multiplient des représentants de vecteurs, de points, de nombres complexes.

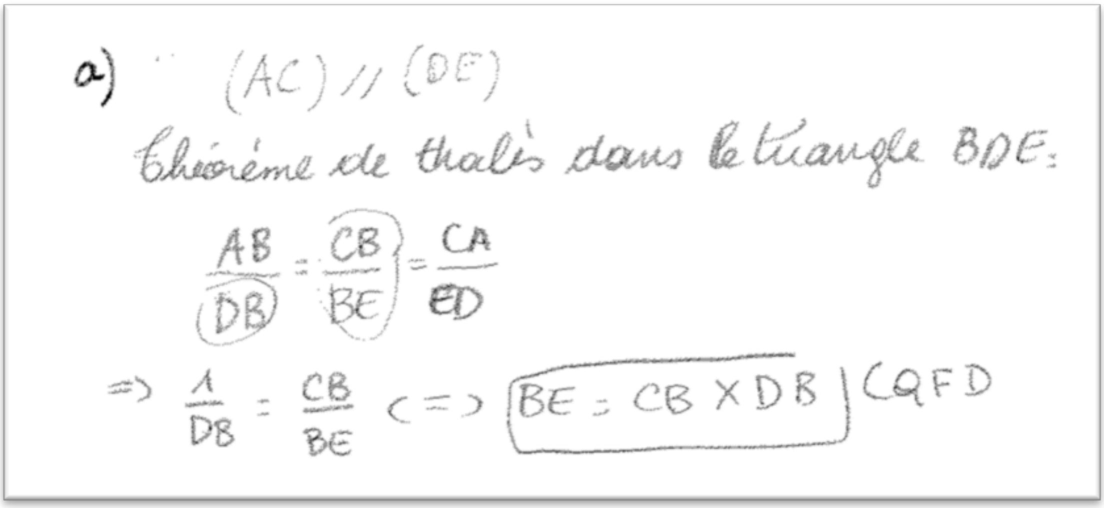
Tableau de classification des réponses attendues		
Question 1.a Supposons que l'unité AB soit égale à 1 cm. Justifier que $BD \times BC = BE$.	**Réponse A** Thalès-Démonstration	**Réponse B** Mesure-Thalès-Calcul
Question 1.b Représenter géométriquement cette multiplication dans le cas où $0 < BD < 1$.	**Réponse A** Géométrique-Visuelle	**Réponse B** Mesure-Thalès-Calcul
Question 1.c Comment interpréter l'égalité $\overrightarrow{BD} = k \times \overrightarrow{BA}$ dans les deux cas suivantes : Premier cas : k est un réel positif. Deuxième cas : k est un réel négatif.	**Réponse A** Géométrique-Propriété	**Réponse B** Analytique
Question 1.d En prenant en compte le deuxième cas ci-dessus, représenter géométriquement $BD \times BC = BE$	**Réponse A** Géométrique-Visuelle	-

Réponses des élèves et leurs analyses respectives

Question 1.a

Supposons que l'unité AB soit égale à $1cm$. Justifier que $BD \times BC = BE$.

Classification : Thalès - Démonstration

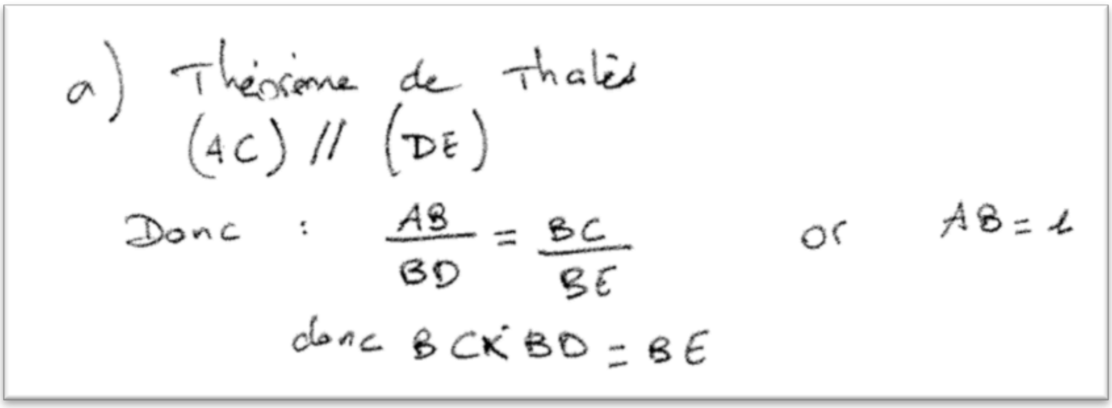


a) (AC) // (DE)

Théoréme de thalès dans le triangle BDE:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{BE} = \frac{CA}{ED}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{DB} = \frac{CB}{BE} \Leftrightarrow \boxed{BE = CB \times DB}$$ CQFD



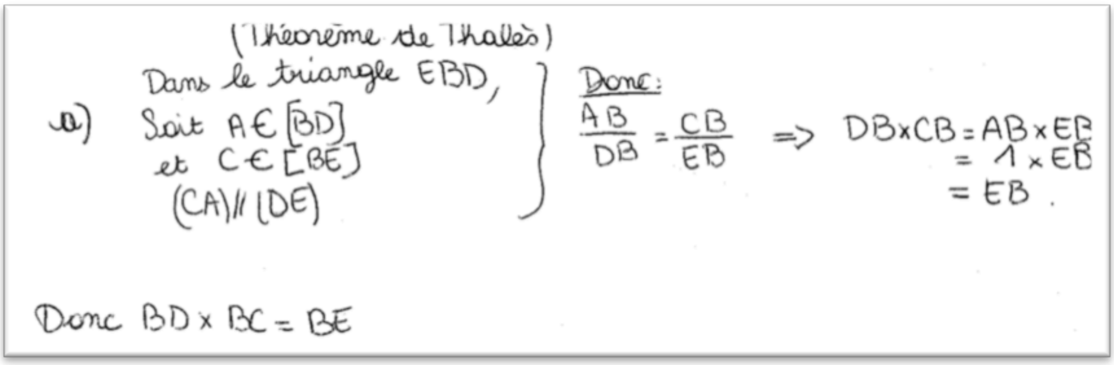
a) Théoreme de thalès

(AC) // (DE)

Donc : $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$ or $AB = 1$

donc $BC \times BD = BE$

Figure B.2 – Ayuma, Léo


(Théorème de Thalès)
Dans le triangle EBD,
a) Soit $A \in [BD]$
et $C \in [BE]$
$(CA) // (DE)$
Donc :
$\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{EB} \Rightarrow DB \times CB = AB \times EB = 1 \times EB = EB$.
Donc $BD \times BC = BE$

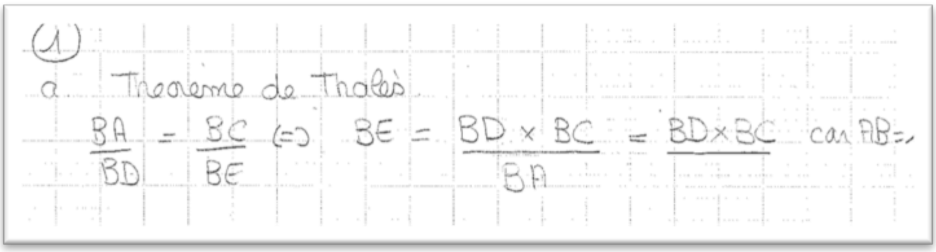

(1)
a. Théorème de Thalès
$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} \Leftrightarrow BE = \frac{BD \times BC}{BA} = BD \times BC$ car AB=,

Figure B.3 – A, N

S’il existe une correspondance entre les réponses attendues *a priori* et les réponses des élèves, elle n’est pas absolue. Ceci étant donné que la demande de justifier les réponses ou d’expliquer les constructions n’a pas été prise en compte ou bien n’a pas été développée en profondeur dans la plupart des cas. Si les justifications ou explications existent, elles restent très économiques et la plupart ressemble aux réponses présentées ci-dessus.

Tout d’abord, nous dirions que la mise en relation entre figure et énoncé s’est produite grâce au théorème de Thalès dans le sens où la figure a été bien reconnue comme un *icône du théorème*.

De ce fait, une activité visant la démonstration d’un énoncé à partir des relations établies entre lui et la configuration géométrique donnée, implique l’établissement d’une correspondance entre l’expression d’un même objet mathématique - la multiplication - dans deux registres de représentation différents : la représentation géométrique de la multiplication de Descartes et la justification algébrique des segments proportionnels dans l’icône de Thalès.

Ainsi, la justification du produit de Descartes par le théorème de Thalès a été effectivement prise en compte par la plupart des élèves des quatre classes où le questionnaire a été mis en place (voir des exemples ci-dessus). Par contre, personne n’a inclut dans le rapport entre les longueurs l'unité de mesure cm pour que nous puissions justifier, par le calcul, un produit ne correspondant pas aux centimètres carrés. La valeur 1 de AB a été bien reconnue mais elle n'a pas été prise en compte comme une grandeur. Ainsi, la justification du produit n'est pas située dans un contexte particulier et les connaissances mathématiques restent limitées au niveau élémentaire de la connaissance du théorème de Thalès.

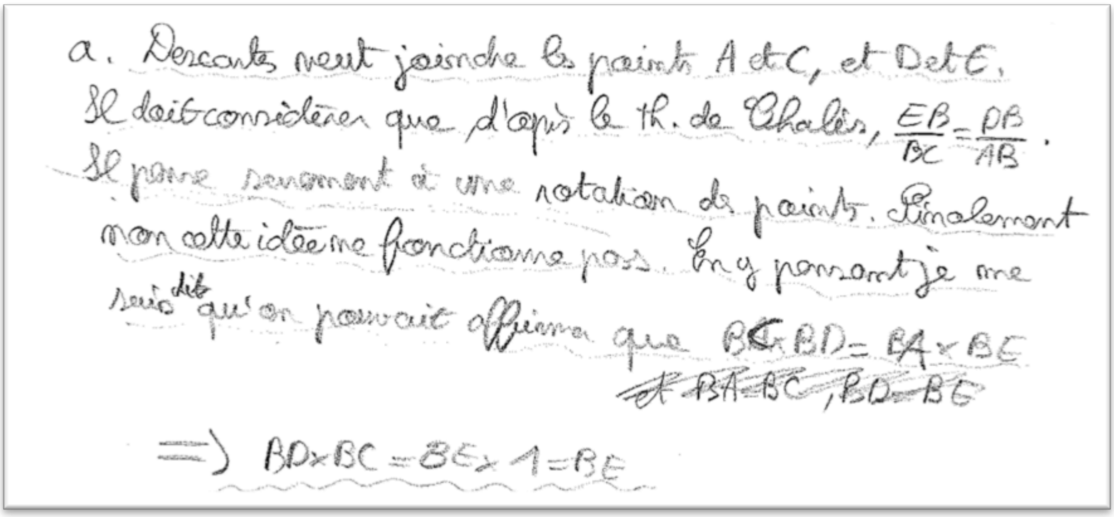
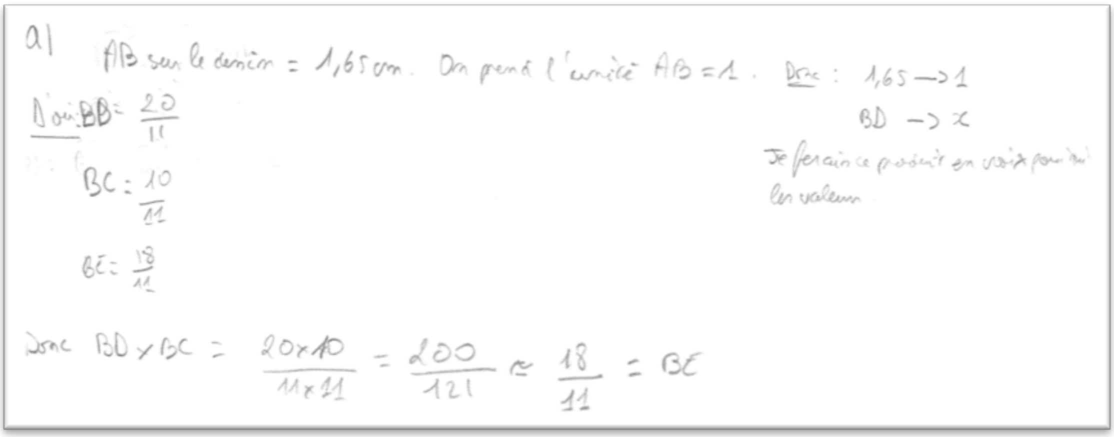

a. Descartes veut joindre les points A et C, et D et E.
Il doit considérer que d'après le th. de Thalès, $\frac{EB}{BC} = \frac{DB}{AB}$.
Il pense seulement à une rotation de points. Finalement non cette idée ne fonctionne pas. En y pensant je me suis dit qu'on pouvait affirmer que $BC \times BD = BA \times BE$
~~et BA=BC, BD=BE~~
$\Longrightarrow BD \times BC = BE \times 1 = BE$

Figure B.4 – Dylan

L'exemple de Dylan, nous montre un cas particulier où un élève a voulu interpréter la procédure de Descartes en signalant une transformation géométrique : la rotation. Aurait-il pensé à ce moment-là à la multiplication de points en les situant déjà dans le plan complexe ? Le produit serait obtenu par l'addition des arguments et par la multiplication des modules : sa direction s'obtient en faisant tourner, autour du point O (B, dans ce cas) et dans le sens trigonométrique, la demi-droite $O\vec{u}$ ($[BD)$) d'un angle égal à la somme des angles dont il faudrait faire tourner (toujours dans le même sens) les demi-droites $[BD)$ (d'angle 0 dans ce cas) et $[BC)$ (d'angle indéterminé).

Par contre, ce n'est pas possible d'identifier le raisonnement qui l'a amené à cette idée, de plus il l'a rejetée en acceptant la validité de l'égalité sans plus de justification.

Classification : Mesure - Thalès - Calcul



a) AB sur le dessin = 1,65 cm. On prend l'unité AB = 1. Donc : 1,65 —> 1

BD —> x

Je ferai ce produit en croix pour toutes les valeurs.

Donc BD = $\frac{20}{11}$

BC = $\frac{10}{11}$

BE = $\frac{18}{11}$

Donc BD × BC = $\frac{20 \times 10}{11 \times 11} = \frac{200}{121} \approx \frac{18}{11}$ = BE

Figure B.5 – P

La réponse *B* est unique en étant la plus proche de celle qui était attendue. Le théorème de Thalès n'a même pas été suggéré mais la justification du produit a été donnée par une référence à la proportionnalité non visible dans l'extrait ci-dessus, mettant en relation la vraie valeur de *AB* et sa valeur 1 donnée dans l'énoncé : chaque longueur corresponde au rapport entre la mesure des longueurs des segments qui constituent la configuration et la valeur réelle de l'unité. Les rapports résultants auxquels nous avons accès dans la réponse de l'élève, sont la version simplifiée des proportions numériquement plus grandes, qui ont d'abord été conçues par une amplification des vraies mesures des longueurs. La figure a été bien prise au cœur de la géométrie expérimentale.

Question 1.b : Représenter géométriquement cette multiplication dans le cas où $0 < BD < 1$.

Classification : Géométrique - Visuelle

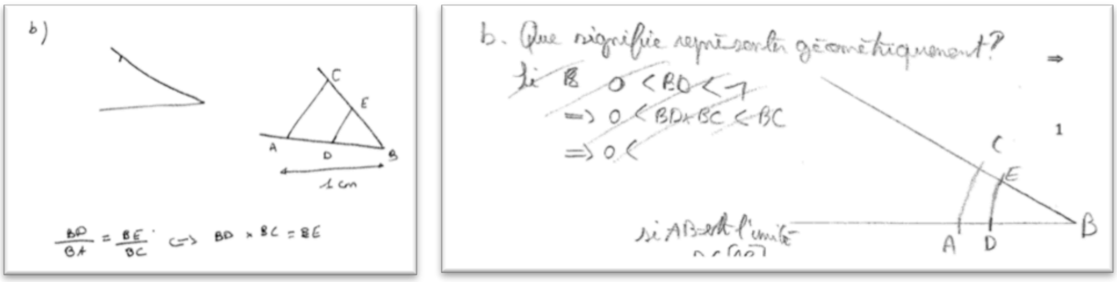


Figure B.6 – Léo, Dylan

Voici deux réponses assez répandues entre les quatre classes. Dans le premier cas (Léo), nous voyons clairement une correspondance entre la représentation visuelle, la proportionnalité des longueurs et l'égalité de Descartes : multiplication des rapports entre longueurs, justifiée par le théorème de Thalès.

Par contre, dans le deuxième cas (Dylan), la réflexion n'est pas du tout la même. D'abord il y a eu une incompréhension de la consigne. Puis en cherchant des chemins pour répondre à la question, la solution s'appuie sur un regard local de la configuration : la demi droite $[BA)$ où il faut placer D entre les points B et A. Finalement, le placement des points C et D pourrait bien être le résultat d'une reprise des droites parallèles mentionnées par Descartes, en complétant de cette façon la représentation géométrique correspondant à la multiplication de deux longueurs particulières dans le cas où $0 < BD < 1$.

Nous dirions qu'un processus de conversion entre le registre de représentation donné dans l'énoncé et la réponse dans un registre de représentation géométrique s'est bien produit grâce à la *médiation* du théorème de Thalès.

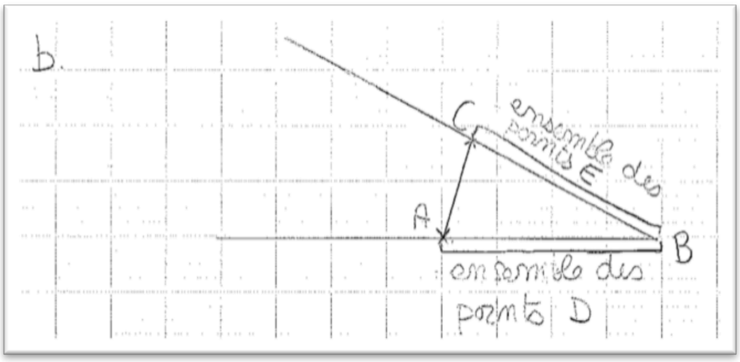


Figure B.7 – N

La réponse de *N*, sans plus d'explications que celles mises sur le dessin, correspond à la représentation la plus adéquate en considérant la consigne. Cette réponse qui n'a même pas été prévue, est très intéressante puisque l'élève n'a pas choisi une figure particulier pour représenter la multiplication dans le cas où BD est inférieur à l'unité, mais une figure générale (Kuzniak, 2010) où il a inclut toutes les réponses possibles qui seraient des solutions à la question. Néanmoins le parallélisme des droites reste implicite.

De ce fait, l'ensemble des points D et E sont restés du même côté du segment AC soit car l'élève a prévu de les joindre de sorte que le parallélisme de droites soit possible pour valider le produit par proportionnalité, soit les points restent du même côté en respectant la procédure décrite par Descartes sans prendre en compte la configuration de Thalès.

Classification : autres réponses

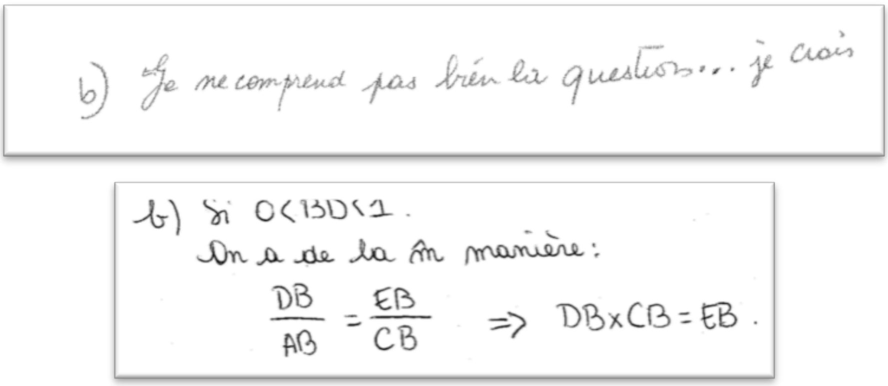


Figure B.8 – Ayuma, E

Les de Ayma et de *E*, sont intéressantes puisqu'elles correspondent à une incompréhension de la consigne « représenter géométriquement ». De ce fait, nous réfléchissons à l'ouverture de la question posée, car c'était peut-être sa mise en forme, ce qui aurait pu gêner le travail des élèves, étant donné que ce type de questions ne font pas partie de leur travail mathématique habituel.

Contrairement au première cas, dans le deuxième exemple, l'intention de répondre à la question s'est concrétisée et même la validation d'un tel produit a été exprimée. En observant les rapport constituant la relation de proportionnalité donnée par l'élève, nous voyons que l'ordre des segments met implicitement en évidence le parallélisme des droites permettant la cohérence du produit. Néanmoins aucune représentation géométrique n'a été mise en place.

Question 1.c

Comment interpréter l'égalité $\overrightarrow{BD} = k \times \overrightarrow{BA}$ dans les deux cas suivantes :

Premier cas : k est un réel positif.

Deuxième cas : k est un réel négatif.

Question 1.d

En prenant en compte le deuxième cas ci-dessus, représenter géométriquement $BD \times BC = BE$

Classification : Géométrique - Propriété / Géométrique - Visuelle

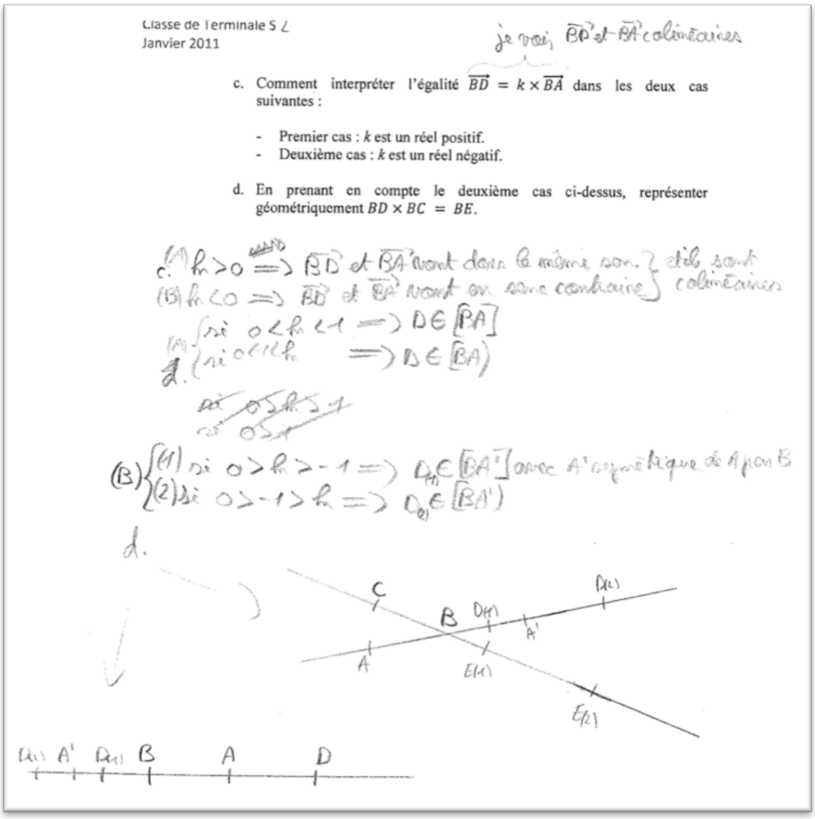


Figure B.9 – Martin

Les réponses de Martin et de Dylan ont bien en commun leurs points de départ : les élèves commencent le développement de leurs réponses en identifiant la représentation algébrique

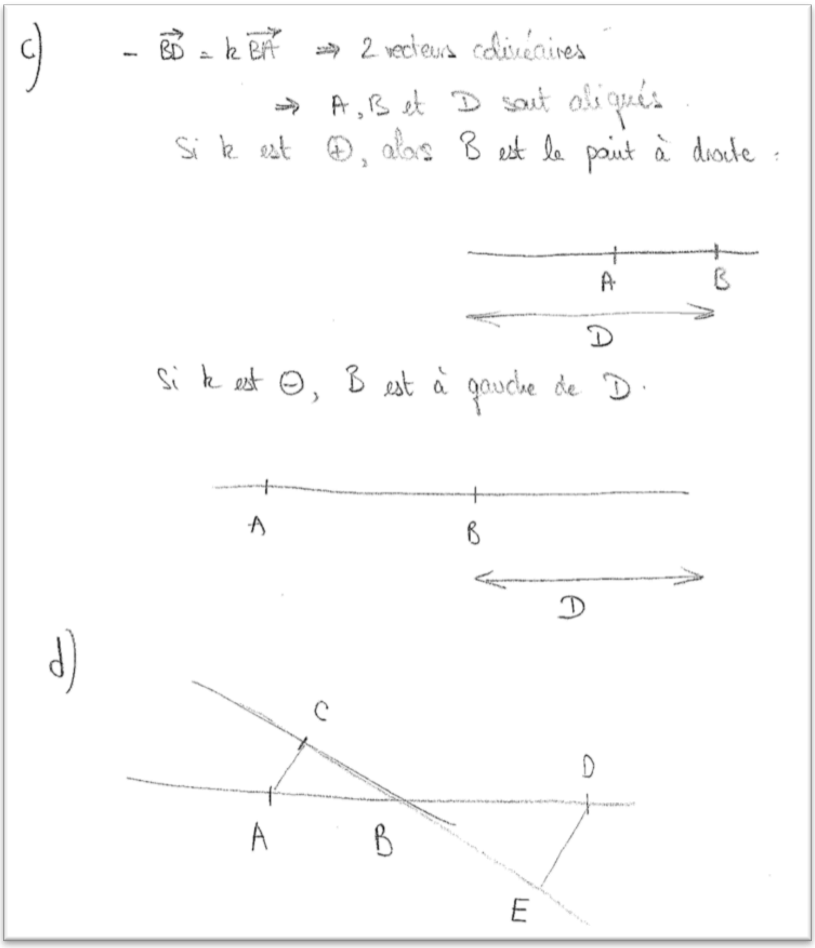


Figure B.10 – Dylan

de deux vecteurs colinéaires. Par contre, seulement Dylan fera une nouvelle référence aux vecteurs, au moment où, il déterminera le sens contraire du vecteur BD par rapport au vecteur BA quand k est strictement inférieur à 0. Par la suite, ils vont travailler en fonction des segments, des demi droites et des points constituant la configuration mais ils ne feront aucune référence, au moins explicite, aux transformations géométriques.

L'alignement des points et l'appartenance du point D au segment BA ou à la demi-droite BA ont aussi été explicités dans les procédures des deux élèves. De ce fait, Dylan commence par situer le point D, selon si la valeur positive de k est inférieur ou supérieur à l'unité. Ensuite, il détermine un point symétrique au point A « par B », nommé A' en situant le point D à l'intérieur ou à l'extérieur de BA' selon si la valeur négative de k est inférieur ou supérieur à cette nouvelle l'unité.

Martin, dans une procédure beaucoup plus économique que celle de Dylan, a répondu à la question *1.d* en fonction de la position donnée au point B quand k est inférieur à 0. Ensuite, nous voyons comment il a pris en compte sa procédure dans la réponse *1.c* pour répondre à la question suivante : l'unité BA' est bien présente ainsi que les deux valeurs de D ($D1$ et $D2$) qui dépendent des valeurs négatives de k. Dans sa représentation géométrique, il n'y a pas des droites parallèles comme dans la configuration de Descartes, mais le produit a été représenté par la position des points $E1$ et $E2$. D'après sa construction géométrique, la position de chaque point E serait en relation avec celles des points $D1$ et $D2$, ce qui permettrait, à vue d'œil, d'établir une relation de proportionnalité entre les segments constituant la représentation.

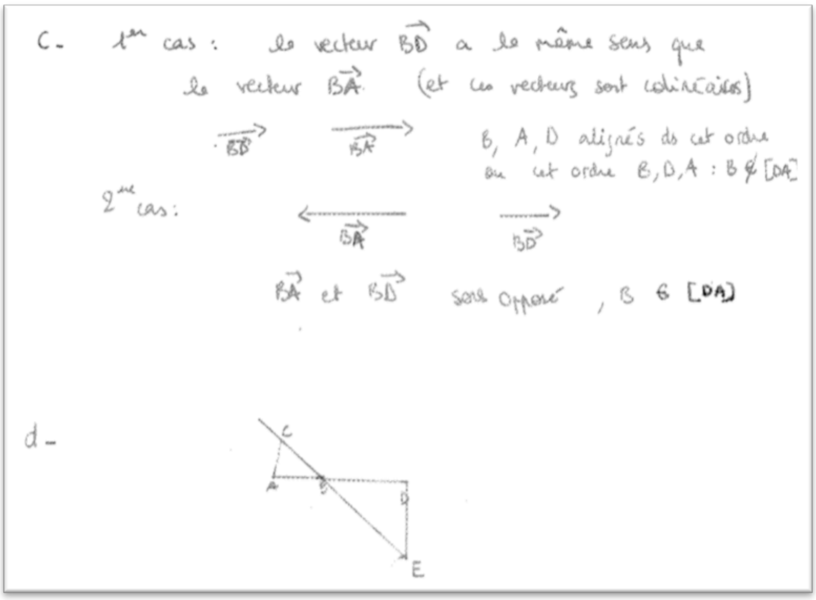
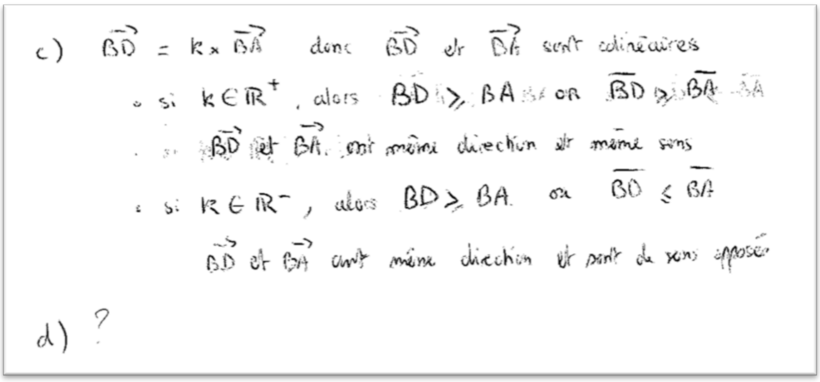


Figure B.11 – Julie

Dans le cas de Julie et à différence des réponses précédentes, la procédure est forte plus concentrée dans les vecteurs. D'abord elle reconnait la colinéarité des vecteurs en faisant aussi une référence à l'alignement des points B, A et C, en indiquant l'ordre dans lequel ces points seraient placés quand k est strictement supérieur à 0. Ensuite elle met aussi en place la procédure de Martin : détermination du placement du point B dans le segment DA, en fonction de la valeur de k. Dans les deux cas en question, elle inclut une représentation géométrique des vecteurs colinéaires et fait référence de la même façon que Dylan, au sens contraire du vecteur BD par rapport à BA, quand k a une valeur négative.

Classification : Géométrique - Propriété


c) $\vec{BD} = k \times \vec{BA}$ donc $\vec{BD}$ et $\vec{BA}$ sont colinéaires

• si $k \in \mathbb{R}^+$, alors $BD \geq BA$ ou $\overline{BD} \geq \overline{BA}$

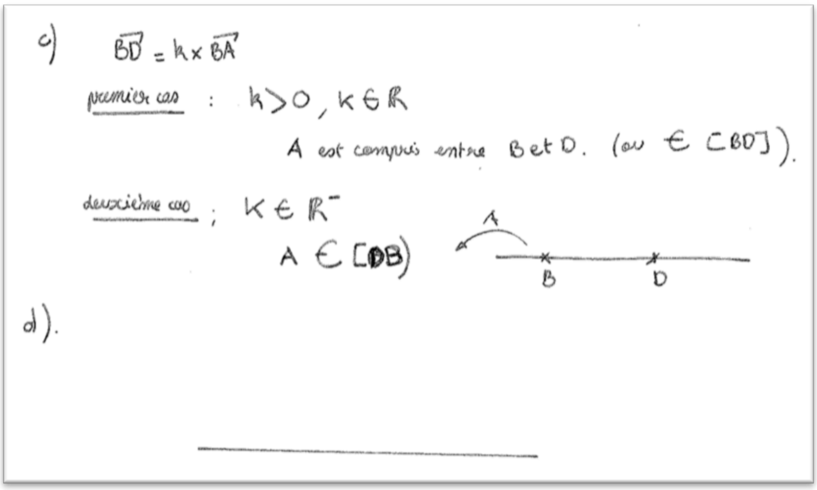
• $\vec{BD}$ et $\vec{BA}$ ont même direction et même sens

• si $k \in \mathbb{R}^-$, alors $BD \geq BA$ ou $\overline{BD} \leq \overline{BA}$

$\vec{BD}$ et $\vec{BA}$ ont même direction et sont de sens opposé

d) ?

Figure B.12 – Alexia


c) $\vec{BD} = k \times \vec{BA}$

premier cas : $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$

A est compris entre B et D. (ou $\in [BD]$).

deuxième cas : $k \in \mathbb{R}^-$

$A \in [DB)$

d).

Figure B.13 – Thomas

Dans le cas d'Alexia, le passage des vecteurs aux segments semble spontané. Dans son interprétation elle identifie d'abord la colinéarité des vecteurs en passant tout de suite à une description de la longueur des segments. De même, elle revient aux vecteurs pour exprimer leur direction et leur sens en fonction de la valeur de k.

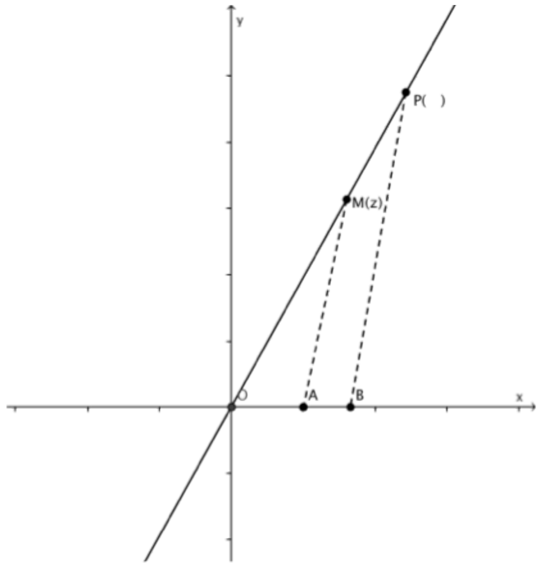
Thomas, dans une explication beaucoup plus symbolique des chacun des cas, les interprète en fonction de la position des points : « A est compris ou non entre B et D » c'est-à-dire il appartient au segment BD, ou bien il appartient à la demi-droite DB). Cette interprétation « statique » de chacun des cas - nous disons statique puisque Thomas reste concentré dans la position des points et non dans la direction de vecteurs - est enrichit para une représentation géométrique indiquant la possible position du point A. Par contre, il n'a pas abouti à la représentation géométrique demandée dans la question *1.d*, de la même manière, Alexia ne l'a pas faite non plus même si elle a fait une référence explicite au sens des vecteurs.

Tableau de classification des réponses attendues et réponses des élèves		
Question 1.a Supposons que l'unité AB soit égale à $1cm$. Justifier que $BD \times BC = BE$.	**Réponse A** Thalès-Démonstration	**Réponse B** Mesure-Thalès-Calcul
Réponses des élèves	88	1
Question 1.b Représenter géométriquement cette multiplication dans le cas où $0 < BD < 1$.	**Réponse A** Géométrique-Visuelle	**Réponse B** Mesure-Thalès-Calcul
Réponses des élèves	48	0
Question 1.c Comment interpréter l'égalité $\overrightarrow{BD} = k \times \overrightarrow{BA}$ dans les deux cas suivantes : Premier cas : k est un réel positif. Deuxième cas : k est un réel négatif.	**Réponse A** Géométrique-Propriété	**Réponse B** Analytique
Réponses des élèves	67	0
Question 1.d En prenant en compte le deuxième cas ci-dessus, représenter géométriquement $BD \times BC = BE$	**Réponse A** Géométrique-Visuelle	-
Réponses des élèves	30	...

Réponses attendues et leurs analyses respectives

Question 2 : énoncé

Observez la figure et répondez aux questions suivantes :



Dans cette figure (AM) et (BP) sont parallèles (A d'abscisse 1 et B d'abscisse k), M a pour affixe z.

Question 2.a : Donner la relation entre les affixes de M et P.

Réponse A

On prend en compte l'information donnée sur la figure et dans l'énoncé. On suppose que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ son colinéaires, donc, les points O, M, P sont alignés.

D'après Thalès on sait que :

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BD}$$

D'où,

$$\frac{1}{k} = \frac{OM}{OP}$$

Ainsi,

$$BP = k \times OM$$

On conclut que $\overrightarrow{OP}$ correspond à un agrandissement du vecteur $\overrightarrow{OM}$. De même, $\overrightarrow{OP}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, en étant le produit de l'homothétie de rapport $k(k \times \overrightarrow{OM})$.

Le rapport entre les affixes des points M et P et entre les normes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ est k ou $\frac{1}{k}$. Donc $z' = kz$.

Analyse globale de la tâche et première réponse attendue

Dans cette question la représentation géométrique est similaire à celle de la première question, mais elle est située dans le plan complexe(ce que l'on déduit puisque l'on parle d'affixes) et décrite par un énoncé qui exprime son contenu. Dans les deux cas (première et deuxième question), un enjeu entre deux registres de représentations sémiotiques est clairement mise en place : le registre figural et le registre discursif (Duval, 2006b). La figure donnée vise la mise en fonctionnement d'un processus cognitif de visualisation.

Nous tenons donc à ce que les élèves puissent établir un lien entre cette question et les précédentes en transposant la configuration de la multiplication de Descartes au plan complexe. Les droites parallèles, étant prédéfinies dans l'énoncé, pourraient faciliter la recherche d'une justification aux relations trouvées entre les composants de la configuration à travers le théorème de Thalès. De plus, la prise en compte des relations géométriques établies pour les égalités données dans l'exercice précédent (cf. Questions *1.c/1.d*) pourrait leur permettre d'identifier l'existence d'un produit et d'identifier l'homothétie liant les deux affixes en question. De ce fait, il faudra d'abord faire l'hypothèse que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires et que les points O, M, P sont alignés de sorte que la relation (rapport) entre les affixes puisse être donnée par l'homothétie de rapport k.

Mais cette réponse est-elle si évidente ? La réapparition d'une figure dans l'énoncé nous amène à réfléchir par rapport à son rôle et sur comment elle pourrait être prise en compte par les élèves : vont-ils agir sur la figure pour concrétiser leurs hypothèses mettant en lien le plan complexe, la configuration de Descartes et le théorème de Thalès ? Les élèves, vont-ils mettre en relation les données sur la figure et l'information dans l'énoncé ? Comment ? L'observation de la figure, sera-t-elle suffisante pour faire appel aux propriétés qui mettent en relation ses composantes comme la réponse attendue le précise ? La mise en œuvre des procédures reliées à la géométrie élémentaire axiomatique (Houdement & Kuzniak, 1999) correspond au paradigme géométrique visé pour répondre à cette question.

Il n'y a ni démonstration, ni construction demandées, par contre, l'analyse de l'énoncé et de la figure à partir de l'observation de ses composantes pourrait faire émerger le processus de visualisation attendu permettant l'établissement des relations entre eux. Ceci, grâce à ce que la figure, comme nous l'avons déjà dit, possède des codages qui sont directement liés aux données de l'énoncé. En d'autres termes, la visualisation serait donc le processus cognitif qui faciliterait l'accès à la réponse attendue par l'identification de relations entre l'ensemble de composantes de la configuration donnée et les transformations géométriques. La preuve de vérité de ces relations serait donnée par la mise en relation des composants de la figure à travers le théorème de Thalès.

Réponse B

On a $O(0,0), M(x,y), A(1,0) et B(k,0)$.

$$m_{(AM)} = \frac{y-0}{x-1} = \frac{y}{x-1} m_{(BP)} = \frac{b-0}{a-k} = \frac{b}{a-k}$$

Puisque (AM) et (BP) sont parallèles, on suppose que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires ainsi que les points O, M, P sont alignés.

$$m_{(AM)} = m_{(BP)} \iff \frac{b}{a-k} = \frac{y}{x-1}$$
$$y(a-k) = (b(x-1)$$

Or,

$$m_{(MO)} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}$$
$$m_{(MO)} = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$$

D'où,

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

On a donc le système,

$$y\,(a-k) = (b(x-1)$$
$$ay = bx$$

D'où,

$$b = ky$$
$$a = kx$$

On conclut que

$$\begin{aligned}(a, b) &= (kx, ky) = k\,(x, y)\\ M &= x + yi = z\\ P &= a + bi = kz\end{aligned}$$

Analyse

Cette réponse est visée, *a priori*, car une transposition de la multiplication de Descartes peut bien ne pas être évidente. De plus, il existe la possibilité que la configuration de Thalès ne soit pas reconnue ou simplement que les élèves ne trouvent pas son utilité étant donné que la question porte sur les nombres complexes.

De ce fait, le calcul algébrique semble probable d'être développé. Nous voyons bien que le chapitre sur les nombres complexes renvoie au calcul littéral, à la résolution d'équations, à la recherche d'affixes et de valeurs inconnues. Ainsi, une autre façon d'aborder cette question pourrait être dans le cadre de la géométrique analytique. En conséquence, nous aurions probablement une réponse de ce genre, même si elle était isolée du reste du questionnaire.

Compte tenu de ce qui précède, si les élèves étudient la question, les données sur la figure et l'information dans l'énoncé, ils pourraient dériver dans l'analyse et trouver l'affixe de z' : on preuve le parallélisme des droites pour déterminer le rapport entre les affixes (k).

Dans ce cas, les connaissances mise en fonctionnement par les données présentées dans l'énoncé, permettraient aux élèves « d'en tirer d'autres connaissances qui en sont les conséquences » (Houdement & Kuzniak, 1999, p. 10). La figure géométrique serait ainsi un outil favorisant la déduction, permettant de mettre en place des connaissances qui vont prouver (dans le sens de preuve de Balachef (Balacheff, 1982)), à travers la géométrie analytique, les observations faites sur la figure géométrique en question.

Réponse C

La relation est k ou $\frac{1}{k}$. Donc, $OP = k \times OM$.

Analyse

Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse que les points O, M, P sont alignés. Une réponse immédiate correspond donc à l'identification des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OM}$ colinéaires. Ceci, dépend bien sûr de la disponibilité (Robert, 2008) de ces connaissances chez les élèves, ce qui leur permettraient d'arriver à une réponse directe.

Remarque : Il peut y avoir un oubli de vecteurs. Dans ce cas, la procédure pourrait être la suivante : théorème de Thalès pour $OP = k \cdot OM$ puis passage direct à $z' = k \cdot z$.

Dans ce cas, la transposition de la configuration de la multiplication de Descartes au plan complexe constitue aussi la base du processus permettant d'aboutir à la réponse correcte.

Question 2.b : Déterminer l'affixe du point P en fonction de z, sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.

Réponse A

On considère, d'après la réponse à la question précédente, que la relation (rapport) entre les affixes est k. On veut donc trouver la valeur de k.

D'après le théorème de Thalès on sait que,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{OP}$$

On remplace par l'information numérique donnée dans la question,

$$\frac{1}{k} = \frac{5}{8}$$

D'où,

$$k = \frac{5}{8}$$

On sait que z est l'affixe représentant du vecteur $\|\overrightarrow{OM}$ et du point M. On cherche l'affixe du point P en fonction de z. On remplace OM par z et k par sa valeur numérique,

$$\frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{z}{OP}$$

D'où,

$$OP = \frac{8}{5} \times z$$

Donc, l'affixe du point P en fonction de z équivaut à $\frac{8}{5}z$.

Analyse

Cette réponse suit la même logique de la réponse A à la question $2.a$. D'après le théorème de Thalès nous allons trouver la valeur de k puis nous allons remplacer les données dans la même relation de proportionnalité $\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{OP}$par les valeurs numériques correspondantes, ainsi que par z : ($\frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{z}{OP}$). De cette façon nous avons un accès évident à la réponse cherchée en fonction de z sans marge d'erreur.

Nous sommes conscients qu'une réponse de cette longueur est peu probable étant donné qu'elle ne prend pas en compte une économie du calcul. Par contre, nous voyons probable la prise en compte d'au moins une partie de tout ce processus.

Ce qui nous intéresse le plus, est la considération de z puisque la demande d'une réponse en fonction de z vise l'établissement d'un lien plus étroit entre un nombre complexe et une transformation géométrique, dans ce cas, l'homothétie.

Réponse B

On sait que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ son colinéaires et que la relation entre leurs affixes est le rapport de leurs normes.

Ainsi, $\overrightarrow{OP} = 8 \cdot u$ et $\overrightarrow{OM} = 5 \cdot u$. (u étant un vecteur unitaire dirigeant la demi-droite $[OM)$).

Analyse

Il est possible qu'une réponse faisant un lien entre vecteurs et nombres complexes ne se soit pas produite. Ainsi, nous considérons une réponse ayant seulement prise en compte la propriété de la colinéarité de vecteurs. Cette réponse dépendra toujours d'une hypothèse sur la figure faisant appel aux points O, M, P alignés.

Réponse C

Etant k le rapport entre les normes des vecteurs OP et OM de valeur $\frac{8}{5}$, l'affixe de $\overrightarrow{OP} = kz = \frac{8}{5}z$.

Analyse

Cette réponse n'inclut pas des calculs explicites mais elle implique un calcul correct de la valeur de$k$ puis l'établissement d'une équivalence entre les affixes z, z' et les représentants des vecteurs.

Comme toute réponse directe, elle dépend de la disponibilité des connaissances préalables (Cf. Analyse réponse C, question *2.a*) ainsi que de la possibilité de reconnaître les propriétés mettant en lien les composantes de la figure.

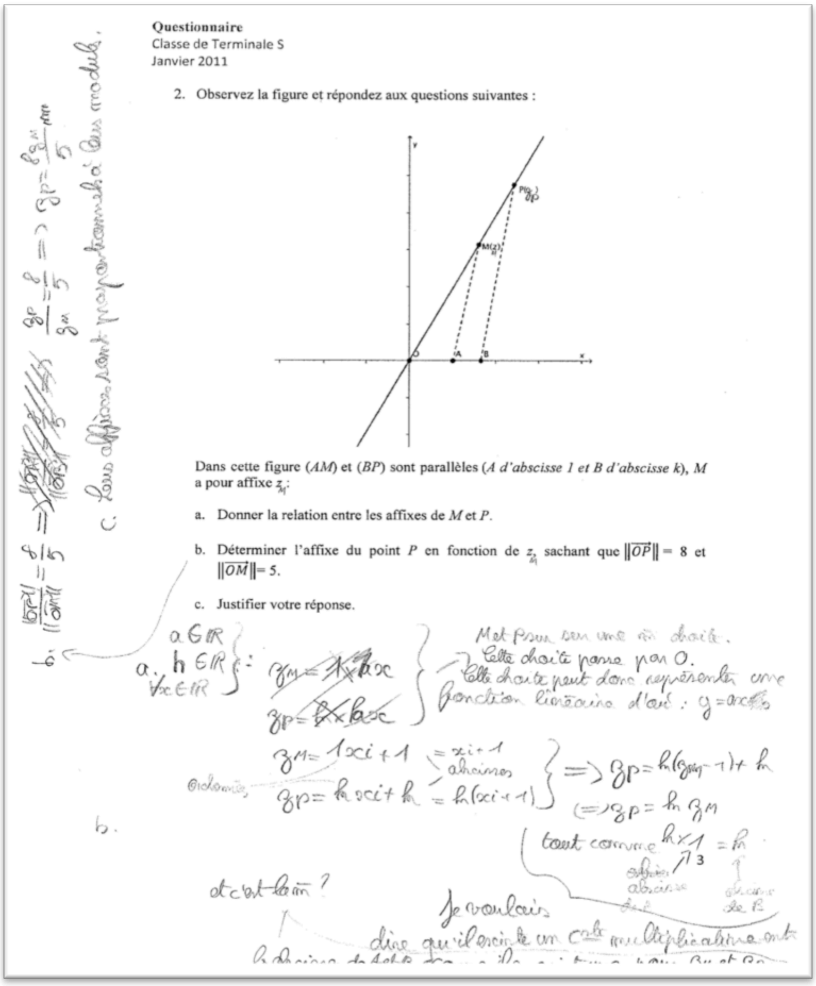
Tableau de classification des réponses attendues			
Question 2.a Donner la relation entre les affixes de M et P.	**REPONSE A** Thalès-Calcul	**Réponse B** Analytique	**Réponse C** Géométrique - Expression
Question 2.b Déterminer l'affixe du point P en fonction de z, sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.	**Réponse A** Thalès - Calcul	**Réponse B** Complexe - Propriété	**Réponse C** Complexe - Expression

Réponses des élèves et leurs analyses respectives

Question 2.a

Donner la relation entre les affixes de M et P.

Classification : Thalès - calcul



Questionnaire
Classe de Terminale S
Janvier 2011

2. Observez la figure et répondez aux questions suivantes :

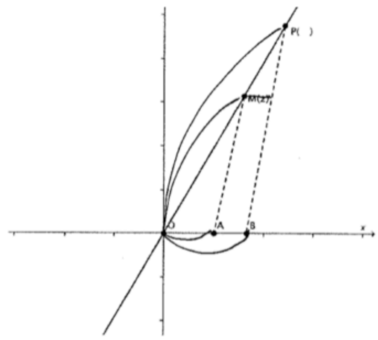
Dans cette figure (AM) et (BP) sont parallèles (A *d'abscisse 1 et* B *d'abscisse k*), M a pour affixe z_M :

a. Donner la relation entre les affixes de M et P.

b. Déterminer l'affixe du point P en fonction de z_M sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.

c. Justifier votre réponse.

Figure B.14 – Dylan



Dans cette figure (AM) et (BP) sont parallèles (*A d'abscisse 1 et B d'abscisse k*), M a pour affixe z :

a. Donner la relation entre les affixes de M et P.

b. Déterminer l'affixe du point P en fonction de z, sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.

c. Justifier votre réponse.

a) $(AM) // (BP)$

Théorème de Thalès

$\frac{OM}{OP} = \frac{OA}{OB} \iff \frac{|z_M|}{|z_P|} = \frac{1}{k} \iff |z_P| = k \times |z_M|$

$z_P - z_M = k'$

$z_P = k' + z_M$

$z_B - z_A = k - 1$

$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OM}} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}$

3

$\frac{z_P}{z_M} = \frac{k}{1} \iff z_P = k z_M$

théo Thalès $\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{OP} = \frac{5}{8} \iff \frac{1}{k} = \frac{5}{8} \iff k = \frac{8}{5}$

$z_P = \frac{8}{5} z_M$

Figure B.15 – Léo

Comme des réponses à cette question, nous avons à présenter une sélection assez représentative de celles des quatre classes qui ont répondu le questionnaire. Nous avons à dire aussi que la plupart des élèves ont répondu à cette question en faisant appel à une situation de proportionnalité permettant de trouver les résultats attendus. Ainsi, cette situation a été explicitement justifiée, dans plusieurs cas, par le théorème de Thalès. Ceci nous permet, *a priori*, d'identifier la transposition des connaissances mises en œuvre dans la première partie de la première question du questionnaire.

En outre, la visualisation de transformations géométriques n'étant pas évidente, elle pourrait être favorisée par la décomposition algébrique de la configuration de Descartes, faite dans les questions *1.c* et *1.d*. Dans les réponses à ces questions, la conversion (Duval, 2006a) des multiplications présentées dans un registre algébrique a été effectivement mise en œuvre étant donné les productions des élèves concernant leur représentation dans un cadre géométrique. L'homothétie et la rotation ont été soit interprétées, soit reconnues, voire comprises, de sorte qu'elles ont fait partie des procédures de résolution le plus répandues. Quelle est l'influence de ce travail dans les procédures de résolution à cette nouvelle question ? Nous allons décrire le travail des élèves en essayant d'interpréter leurs raisonnements.

Dans les exemples où nous incluons la représentation géométrique donnée dans l'énoncé, nous pouvons observer d'une part, qu'il existe une utilisation partielle de cette figure, c'est-à-dire l'information/codage qu'elle porte est complétée par une partie de l'information donnée dans l'énoncé. D'autre part, elle présente des traces graphiques qui rendent compte du raisonnement des élèves directement lié aux réponses qu'ils ont rédigées dans un registre algébrique. Par exemple, Léo a mis des traces sur sa figure, qui font référence à la proportionnalité des segments compris dans la configuration. Notamment, nous dirions que la figure a été un support pour la visualisation des relations de proportionnalité des segments compris entre les points A, B, M et P.

Quelque soit le point de départ dans chacune des réponses, le passage par la proportionnalité des segments a toujours été mise en évidence. Dans certains cas, cette proportionnalité a été exprimée en fonction des modules des nombres complexes, mais dans d'autres cas elle a été mise en évidence en fonction des normes des vecteurs. Certains élèves ont mis en relation la proportionnalité des normes et des modules dans une seule réponse et ils ont même justifié les relations établies à travers une autre représentation du produit encore plus précise mettant en relation des propriétés non explicités dans l'énoncé : le cas de l'alignement des points, le cas de l'angle en commun (voir Julie).

Par ailleurs, nous pouvons aussi observer des réponses qui mettent en évidence une réflexion analytique sur la configuration (voir Thomas) qui n'ont pas abouti à la réponse attendue. En outre, plusieurs essais algébriques en cherchant la relation entre les affixes restent peu concluants. La formulation de la question, tenant à ce que les élèves réfléchissent en fonction de la figure donnée, a sans doute amené les élèves à la recherche d'une relation algébrique encore plus complexe de celle qui était prévue. On peut penser que cela provient du fait qu'ils se trouvent au milieu du chapitre de nombres complexes, où toutes les relations sur lesquelles ils travaillent se sont concentrées dans le calcul algébrique.

Parfois, les calculs ne sont pas explicites mais des relations entre les segments présents dans la configuration peuvent faire appel à une transposition de la méthode de Descartes dans un

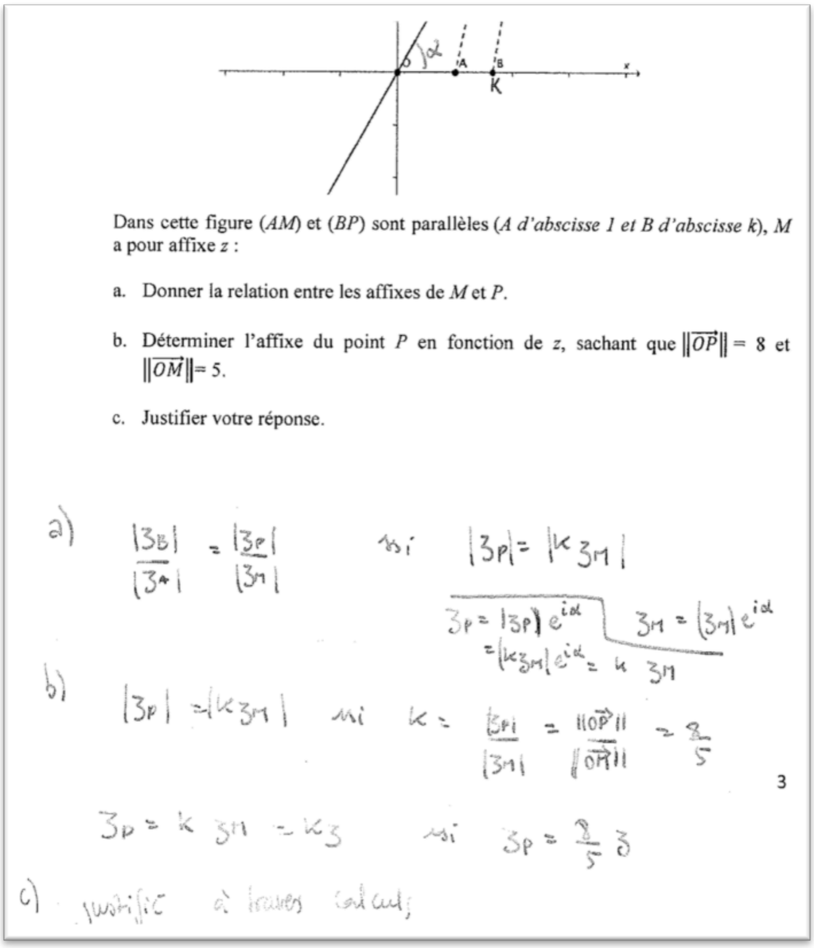
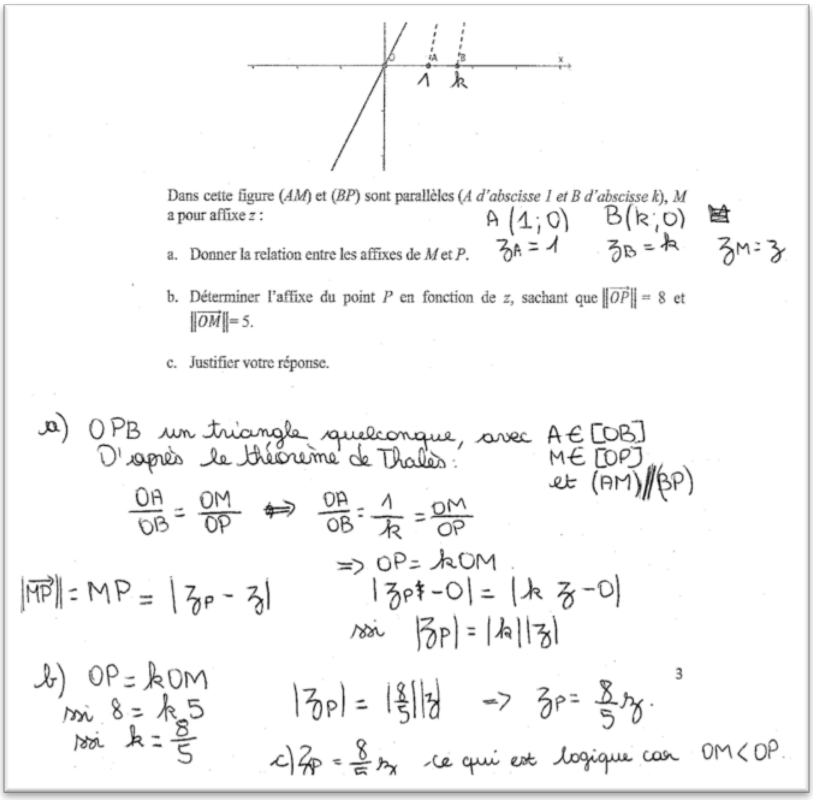


Figure B.16 – Julie

registre algébrique et géométrique (voir Damien). Cette transposition, pourrait bien être un indice d'un processus de visualisation produit par la reconnaissance d'une multiplication en géométrie mais qui a été exprimée avec des éléments algébriques.

Néanmoins, la proportionnalité entre les segments n'a pas été mise en place et la réponse *2.b* n'a pas pu être répondue. Dans certaines réponses, les élèves n'ont rien écrit sur la figure, par contre, la réponse correcte a été de toute façon justifiée par le théorème de Thalès.

Nous voyons encore une fois, par exemple dans la réponse de *H*, que la recherche des procédures algébriques n'aboutit pas vraiment à la réponse attendue à cause, dans ce cas, des erreurs liées à l'expression des égalités algébriques complexes : spécifiquement dans la réponse *a*, l'élève a apparemment cru que les abscisses des points M et P étaient 1 et k. De plus, il a



Dans cette figure (AM) et (BP) sont parallèles (*A d'abscisse 1 et B d'abscisse k*), M a pour affixe z :

$A(1;0)$ $B(k;0)$

a. Donner la relation entre les affixes de M et P. $z_A = 1$ $z_B = k$ $z_M = z$

b. Déterminer l'affixe du point P en fonction de z, sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.

c. Justifier votre réponse.

a) OPB un triangle quelconque, avec $A \in [OB]$, $M \in [OP]$ et $(AM) /\!/ (BP)$

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{OP} \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{1}{k} = \frac{OM}{OP}$$

$$\Rightarrow OP = kOM$$

$\|\overrightarrow{MP}\| = MP = |z_P - z|$

$$|z_P - 0| = |k z - 0|$$

ssi $|z_P| = |k||z|$

b) $OP = kOM$

ssi $8 = k5$

ssi $k = \frac{8}{5}$

$|z_P| = |\frac{8}{5}||z| \Rightarrow z_P = \frac{8}{5}z$.

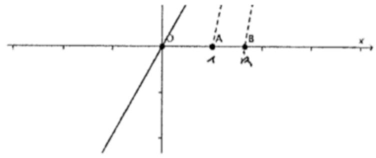
3

c) $z_P = \frac{8}{5}z$ ce qui est logique car $OM < OP$.

Figure B.17 – A

choisi les vecteurs erronés pour son égalité.

Pour conclure, nous pourrions dire que l'observation de la configuration géométrique donnée, a sans doute mobilisée les connaissances pertinentes faisant appel aux propriétés qui mettent en relation les éléments qui la composent. Ainsi, d'un point de vue locale, nous réfléchissons au fait que la justification du produit par le théorème de Thalès — produit implicitement cherché dans la recherche explicite d'une affixe —, pourrait favoriser la prise de conscience d'une représentation géométrique de la multiplication. Le théorème de Thalès a bien été la justification du produit de Descartes dans la première question, alors, une transposition de cette justification à la représentation géométrique de la multiplication dans le plan complexe pourrait effectivement faciliter la visualisation géométrique du produit.



Dans cette figure (*AM*) et (*BP*) sont parallèles (*A d'abscisse 1 et B d'abscisse k*), *M* a pour affixe *z* :

a. Donner la relation entre les affixes de *M* et *P*.

b. Déterminer l'affixe du point *P* en fonction de *z*, sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.

c. Justifier votre réponse.

a). • $\cancel{\dfrac{z_M - z_A}{z_P - z_B} = \dfrac{z - 1}{z_P - k}}$

• $\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OA}{OB}$ d'après le théorème de Thalès.

$\Leftrightarrow \dfrac{z-0}{z_P-0} = \dfrac{1-0}{k-0}$

$\Leftrightarrow \dfrac{z}{z_P} = \dfrac{1}{k}$ $\Leftrightarrow z = \dfrac{z_P}{k}$

ou $z_P = zk$

b) $\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OA}{OB}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\|\overrightarrow{OM}\|}{\|\overrightarrow{OP}\|} = \dfrac{1}{k}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{k}$

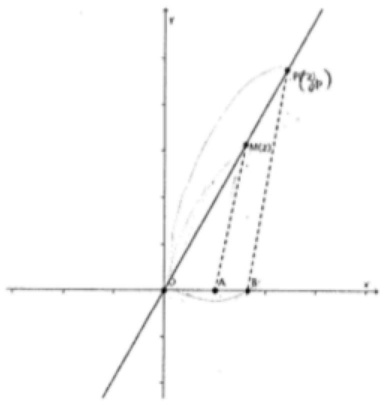
$\Leftrightarrow k = \dfrac{8}{5}$.

$z_P = \dfrac{8}{5} z$

3

c) le théorème de Thalès s'applique car les points sont alignés dans l'ordre O,M,P et O,A,B.

Figure B.18 – Thomas



Dans cette figure (*AM*) et (*BP*) sont parallèles (*A d'abscisse 1 et B d'abscisse k*), *M* a pour affixe *z* :

a. Donner la relation entre les affixes de *M* et *P*. $\left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}\right)$

$kz = z_P$

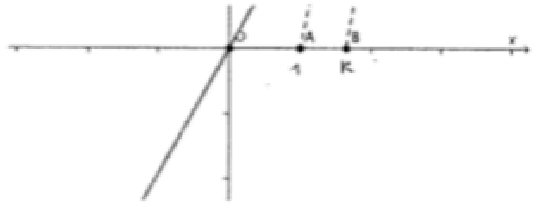
b. Déterminer l'affixe du point *P* en fonction de *z*, sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.

c. Justifier votre réponse.

a) $kz = z_P$ $(z_A = 1)$

b) $|z_P| = \|\overrightarrow{OP}\| = 8$, $|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = 5$

Figure B.19 – Damien



Dans cette figure (AM) et (BP) sont parallèles (*A d'abscisse 1 et B d'abscisse k*), M a pour affixe z :

a. Donner la relation entre les affixes de M et P.

b. Déterminer l'affixe du point P en fonction de z, sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.

c. Justifier votre réponse.

a) $z_P = k \times z$.

b) $\overrightarrow{OP} = k \times \overrightarrow{OM}$

$\|\overrightarrow{OP}\| = |z_P|$

$\|\overrightarrow{OM}\| = |z|$

$\|\overrightarrow{OP}\| = k \times \|\overrightarrow{OM}\|$

$k = \dfrac{\|\overrightarrow{OP}\|}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \dfrac{8}{5}$

$\boxed{z_P = \dfrac{8}{5} \times z}$

Figure B.20 – Alexia

a) z_M = affixe de M $\quad$ z_P = affixe de P.

$z_P = z_M + (x_B - x_A) + i\,(y_B - y_A)$.

b) et c) O, A, B sont alignés dans le même ordre que O, M, P.

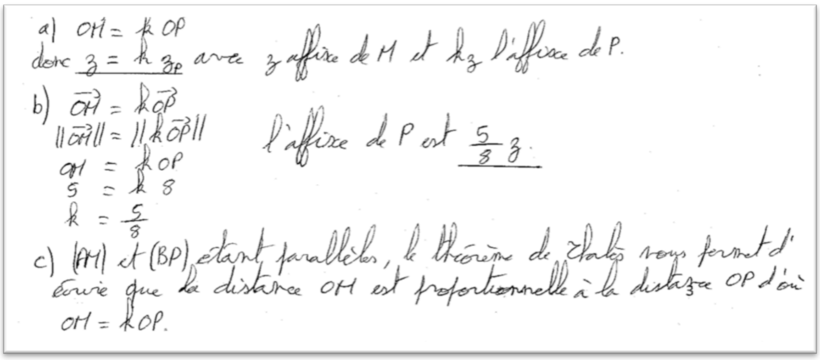
$(AM) // (BP)$

D'après le théorème de Thalès :

$\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AM}{BP}$. 3

$\dfrac{z}{z_P} = \dfrac{1}{k} \rightarrow z_P = k\,z$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Figure B.21 – H



a) $OM = k\,OP$

donc $\underline{z = k\,z_P}$ avec z affixe de M et kz l'affixe de P.

b) $\vec{OM} = k\vec{OP}$

$\|\vec{OM}\| = \|k\vec{OP}\|$ l'affixe de P est $\underline{\frac{5}{8}z}$.

$OM = k\,OP$

$5 = k\,8$

$k = \frac{5}{8}$

c) (AM) et (BP) étant parallèles, le théorème de Thalès nous permet d'écrire que la distance OM est proportionnelle à la distance OP d'où $OM = k\,OP$.

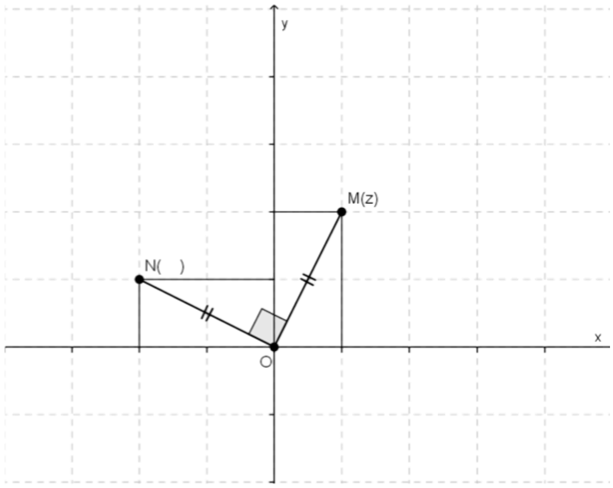
Figure B.22 – B

Tableau de classification des réponses attendues et réponses des élèves			
Question 2.a Donner la relation entre les affixes de M et P.	**REPONSE A** Thalès-Calcul	**Réponse B** Analytique	**Réponse C** Géométrique - Expression
Réponses des élèves	7	0	24
Question 2.b Déterminer l'affixe du point P en fonction de z, sachant que $\|\overrightarrow{OP}\| = 8$ et $\|\overrightarrow{OM}\| = 5$.	**Réponse A** Thalès - Calcul	**Réponse B** Complexe - Propriété	**Réponse C** Complexe - Expression
Réponses des élèves	17	6	1

Réponses attendues et leurs analyses respectives

Question 3 : énoncé

Considérons que z est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Question 3.a :Déterminer l'affixe du point N en fonction de z et justifier votre réponse.

Réponse A

L'affixe du point N en fonction de z est iz.

Soit M le point d'affixe $z(x + iy)$. On sait que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ ont leurs normes égales, donc $N(-y+ix)$ est l'image de M dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On sait (ou on déduit) qu'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est correspondante au produit iz.

L'affixe du point N en fonction de z est donc iz.

Analyse globale de la tâche et première réponse attendue

Dans cette question nous nous attendons à la visualisation d'une transformation géométrique, soit par la mise en oeuvre des propriétés mathématiques la permettant, soit par une interprétation de la représentation géométrique donnée, vu que la plupart de l'information est donnée sur la figure.

L'expression du produit en fonction de z comme iz devrait être le résultat de la reconnaissance, sur la figure, du fait qu'une multiplication par i correspond à une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Cette reconnaissance, comment serait-elle possible ? Pour répondre à cette question il faut d'abord, déterminer le rôle de l'information donnée sur la figure (l'égalité des modules et l'angle de 90°).

Si les élèves ne connaissent pas la signification d'une multiplication par i le codage sur la figure pourrait facilement ne rien dire. Par contre, la figure pourrait devenir un support de raisonnement qui pourrait, soit mettre à disposition des élèves la visualisation d'une propriété déjà apprise et qu'ils pourraient bien justifier à l'aide de l'information donnée, soit la découvrir : les modules égaux permettraient d'en déduire les affixes des points M et N comme $(x+iy)$ et $(-y+ix)$ respectivement, et l'angle de 90° permettrait d'identifier la magnitude de la rotation.

Néanmoins, la mise en relation de cette rotation et la multiplication par i corresponde à une réflexion plus profonde et de haute ampleur :

Si dans le plan complexe, nous faisons tourner d'un demi-tour (180°) un point M d'abscisse 1 et d'ordonnée 0 le résultat de cette rotation serait -1. De ce fait, nous déterminons que pour tourner d'un demi-tour il faut tourner deux fois d'un quart de tour. Nous en déduisons que le carrée d'un quart de tour c'est bien un demi-tour. Nous avons donc que la racine carrée de -1 c'est i. De là, les réflexions d'Argand (1874) concluant que le fait de multiplier par un quart de tour équivaut à multiplier par i.

De retour sur notre figure, nous dirions que les affixes des points M et N se sont mises en relation par une rotation d'un demi-tour, c'est-à-dire, grâce à une multiplication par la racine carrée de -1, en d'autres termes, grâce à une multiplication par i.

Par ailleurs, une réponse iz toute seule, manque des preuves qui nous fassent interpréter une telle réponse comme l'identification visuelle ou la reconnaissance géométrique d'une multiplication par i. Nous concluons donc que cette réponse correspondrait plutôt à une connaissance algébrique d'une multiplication par i.

Réponse B

1) $N(-y, x)$

2) $N(-y + ix)$

3) $N(-Im(z) + iRe(z))$

4.a) D'après une interprétation du graphique où la grille dessinée semble montrer que quoi que ce soit la valeur de x, $y = 2x$, la réponse est la suivante :

Si l'affixe M est $(x + 2xi)$ alors l'affixe de N est $(-2x + xi)$.

4.b) D'après une interprétation du graphique où la grille dessinée semble montrer que $x = 1$ et que $y = 2$, la réponse est la suivante :

Si l'affixe M est $(1 + 2i)$ alors l'affixe de N est $(-2 + i)$.

4.c) D'après une interprétation du graphique identique à la précédente, une autre réponse possible serait :

Soit M et N deux points distincts d'affixes respectives $z(1 + 2i)$ et $z'(-2i + 1)$.

$$\begin{aligned} |z_N - z_M| &= NM \\ Aff(N) &= z - 3 - i \end{aligned}$$

Analyse

La détermination de l'affixe du point N pourrait correspondre à une de ces réponses sans nécessairement faire appel à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Cela peut être une conséquence de ne pas avoir visualisé la représentation géométrique d'une multiplication par i, à un oubli ou simplement à une habitude à la recherche algébrique.

Ces réponses peuvent être aussi influencées par le fait que la grille a été donnée sur le graphique. Ceci, pourrait même tenter des réponses incluant des nombres comme nous le voyons dans les points *4.a* et *4.b*. Dans chacune de ces réponses, les affixes ne sont plus identifiées comme z mais comme un pair d'abscisses et d'ordonnées.

Réponse C

1) Etant donné l'égalité des longueurs sur la figure. Si M(x,y) et N(a,b), alors :

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

2) On détermine $z = re^{i\alpha}$ et $z' = re^{i\beta}$.

On sait que s=r et que $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} z' &= re^{(\alpha+\frac{\pi}{2})} \\ &= re^{i\alpha} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= z \times e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= z \times i \end{aligned}$$

Analyse

La première de ces deux dernières réponses corresponde à une interprétation littérale de l'information donnée sur la figure. Nous attribuons des abscisses et des ordonnées à chaque point représentant un nombre complexe, puis nous exprimons l'égalité de leurs modules. Par contre, cette réponse ne considère pas toute l'information donnée sur la figure, puisque l'angle de 90° n'a absolument pas été pris en compte.

La deuxième réponse implique l'établissement d'une égalité entre les affixes z et z' et leurs représentations exponentielles. Un traitement correct dans le calcul permettrait d'arriver à la bonne égalité d'où nous obtenons la réponse, la plus attendue (iz). Néanmoins, la considération de z dans ce cas, ne veut pas nécessairement exprimer l'interprétation de iz comme une rotation. Cela serait plutôt une reconnaissance algébrique d'une multiplication par i.

Tableau de classification des réponses attendues			
Question 3.a	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
Considérons que z est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$: Déterminer l'affixe du point N en fonction de z et justifier votre réponse.	Complexe - Géométrique	Complexe - Expression	Complexe - calcul

Réponses des élèves et leurs analyses respectives

Question 3.a

Déterminer l'affixe du point N en fonction de z et justifier votre réponse.

Classification : Géométrique - Complexe

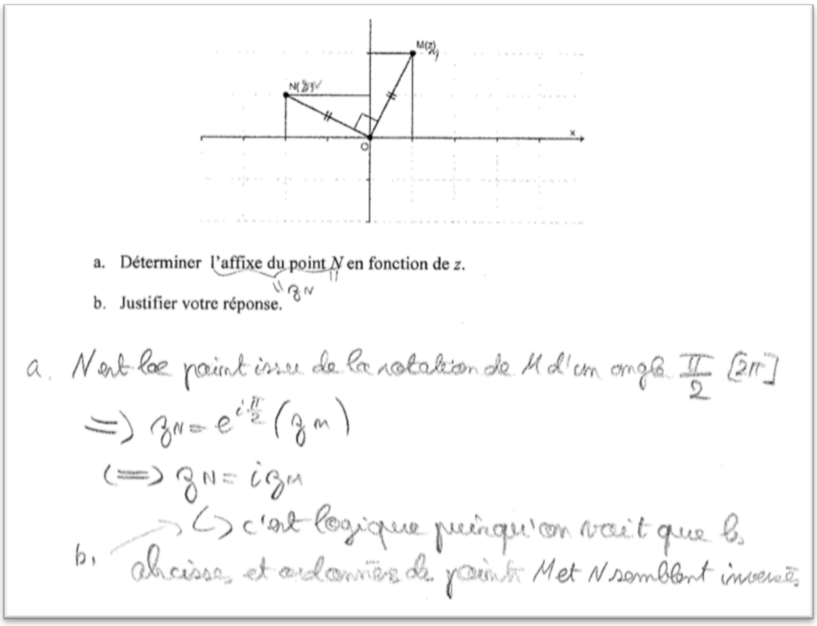
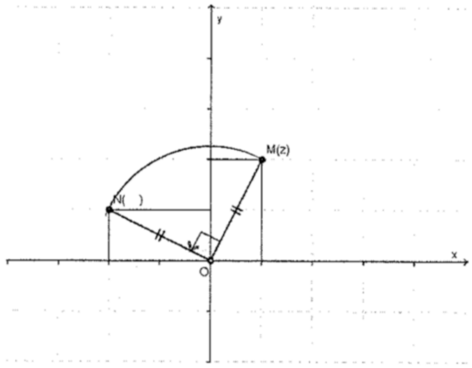


Figure B.23 – Dylan

En observant les deux premières réponses, nous nous posons la question sur leur validité comme des réponses géométriques. Nous avions déjà établi *a priori* que la seule formulation de la multiplication par i n'était pas une preuve de la découverte de la propriété par sa seule visualisation sur la figure. Par contre, elle correspond à la reconnaissance des propriétés déjà apprises au niveau théorique, c'est-à-dire, les élèves savent que multiplier par i équivaut à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors, il suffit de visualiser dans la figure, en prenant en compte les informations qu'elle porte, qu'elle correspond effectivement à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (voir Dylan).



a. Déterminer l'affixe du point N en fonction de z.

b. Justifier votre réponse.

N est l' immage de M par la rotation de centre O et d' angle $\frac{\pi}{2}$

Figure B.24 – Lucie

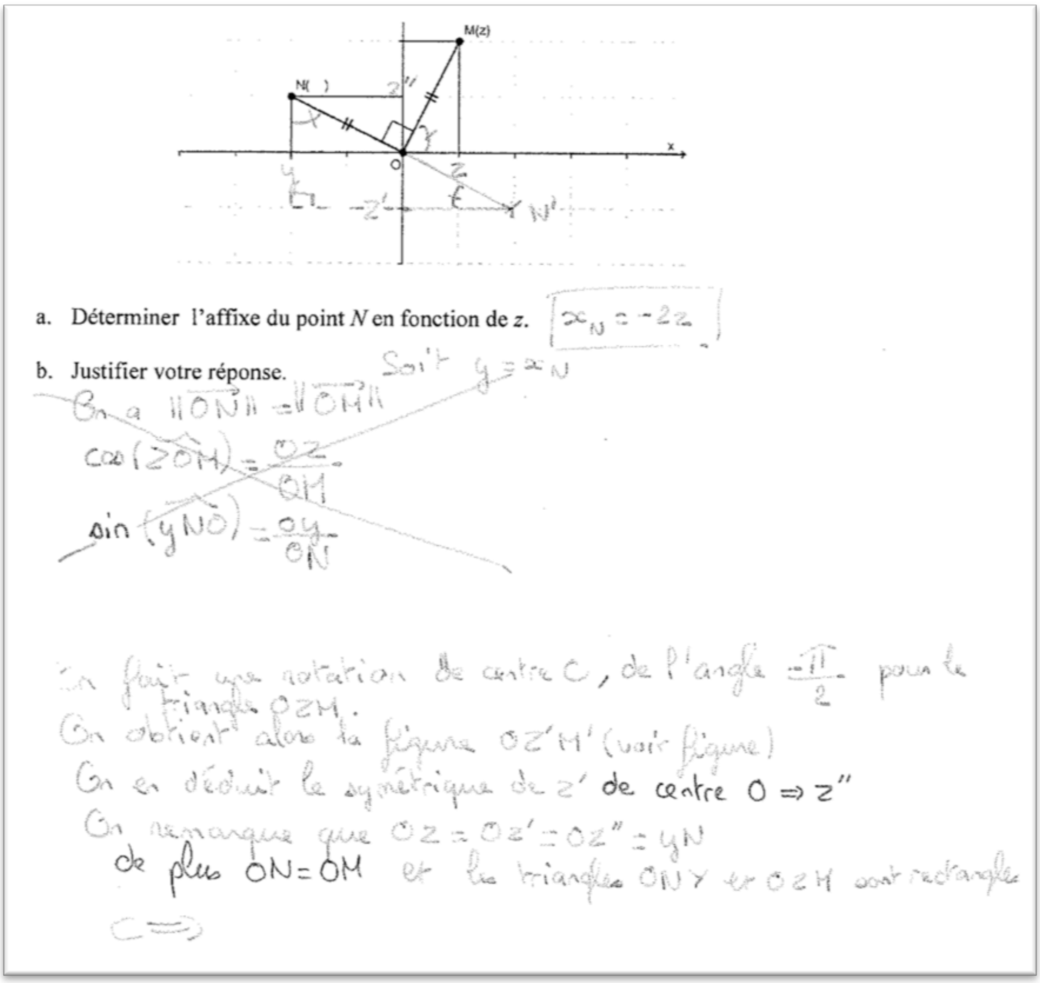
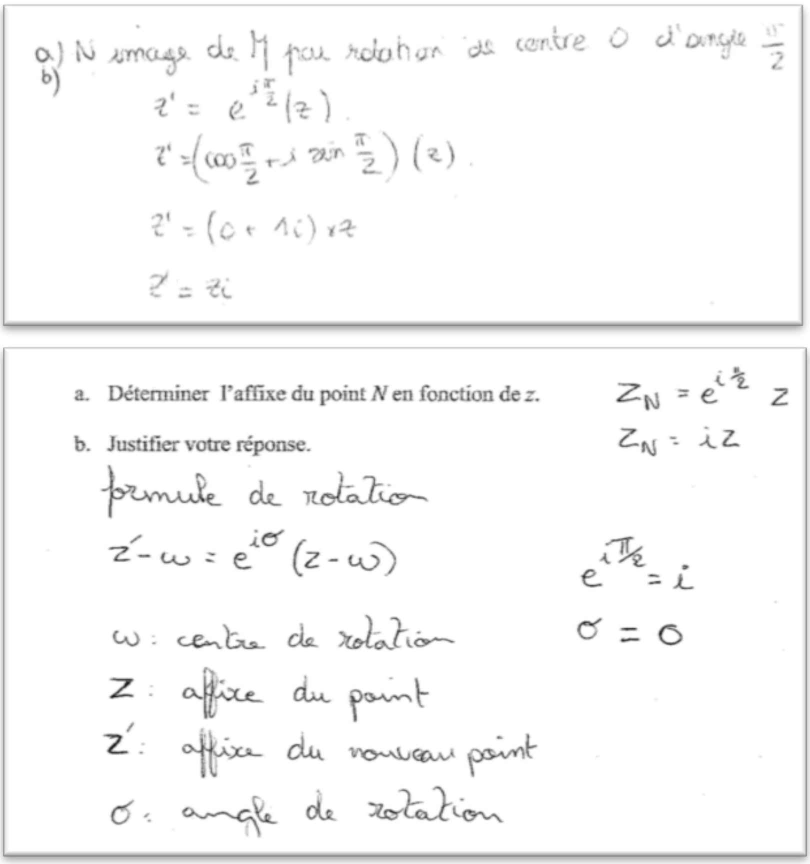


Figure B.25 – Maxence

Dans le cas de Maxence, la figure a été décomposée en triangles, et l'élève essai de trouver l'affixe de N en faisant des hypothèses sur la figure, laquelle il a décomposée en triangles. Ce qui est intéressant dans cette réponse est de voir comment l'élève, ne connaissant pas la signification d'une multiplication par i, manipule la figure en faisant tout d'abord, la rotation d'un des triangles. Par contre, ses hypothèses ne lui permettent pas d'aboutir à la bonne réponse : il a établi des relations en s'appuyant dans l'information sur la figure, mais il ne connaît pas non plus la signification d'une « affixe » en répondant à la question *a* avec « l'abscisse de N''.

Classification : Complexe - Calcul ou " l'interprétation géométrique de la multiplication par i prouvée dans un registre algébrique ?



a) N image de M par rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$

b)

$z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z)$.

$z' = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)(z)$.

$z' = (0 + 1i) \times z$

$z' = zi$

a. Déterminer l'affixe du point N en fonction de z. $Z_N = e^{i\frac{\pi}{2}} Z$

b. Justifier votre réponse. $Z_N = iZ$

formule de rotation

$z' - \omega = e^{i\sigma}(z - \omega)$ $e^{i\pi/2} = i$

ω : centre de rotation $\sigma = O$

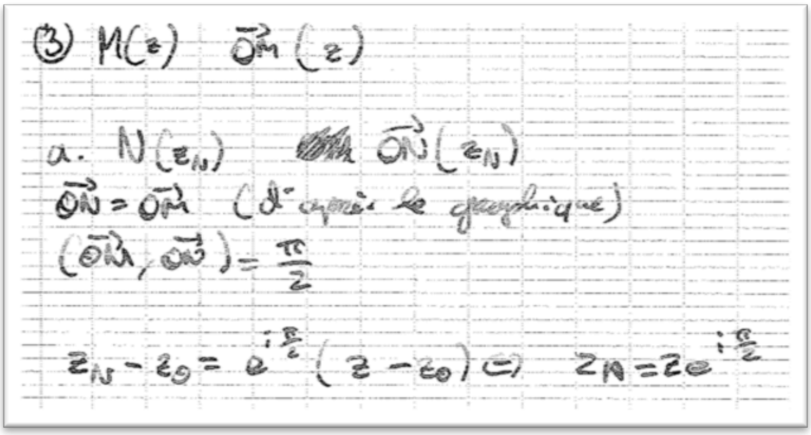
z : affixe du point

z' : affixe du nouveau point

σ : angle de rotation

Figure B.26 – Pa, O

Les réponses correspondantes aux figures B.26 et B.27, sont toutes correctes même s'il y a quelques erreurs dans la formulation de certaines égalités. Dans ces quatre cas, aucun des élèves n'a fait des interventions sur la figure donnée. Nous dirions tout simplement qu'ils n'ont pas eu besoin de le faire : ils ont reconnu la multiplication par i et ils ont justifié cette reconnaissance avec tous les outils algébriques qu'ils avaient à leur disposition. De ce fait, nous réfléchissons sur ce qui la figure représente : elle permet bien la mise en fonctionnement d'un jeu entre différents registres de représentation sémiotiques. Ceci, puisque l'information portée par la figure permet la reconnaissance d'un même objet mathématique dans deux registres de représentation différents. Ces deux registres sont mis en relation à travers des procédures de démonstration. Néanmoins, pourrions nous dire qu'un enjeu entre différents registres de représentation a été mis en place si la multiplication par i a été reconnue, puis représentée al-



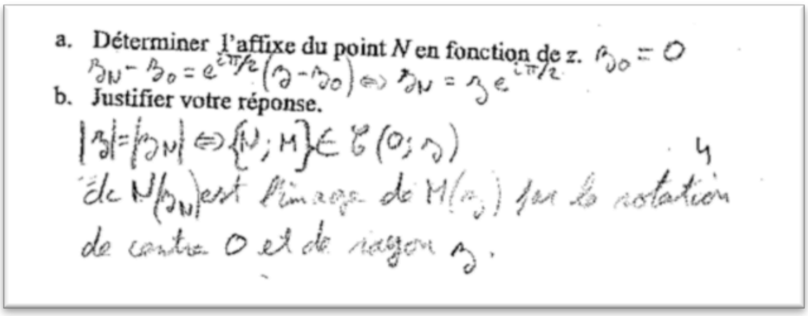
③ M(z) $\vec{OM}(z)$

a. N(z_N) $\vec{ON}(z_N)$

$\vec{ON} = \vec{OM}$ (d'après le graphique)

$(\vec{OM}, \vec{ON}) = \frac{\pi}{2}$

$z_N - z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_0) \Leftrightarrow z_N = ze^{i\frac{\pi}{2}}$



a. **Déterminer l'affixe du point *N* en fonction de z.** $z_0 = 0$

$z_N - z_0 = e^{i\pi/2}(z - z_0) \Leftrightarrow z_N = z e^{i\pi/2}$

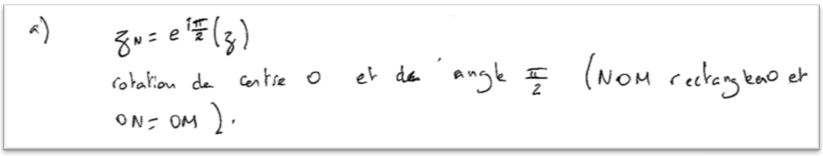
b. **Justifier votre réponse.**

$|z| = |z_N| \Leftrightarrow \{N; M\} \in \mathcal{C}(O; z)$

donc N(z_N) est l'image de M(z) par la rotation de centre O et de rayon z.

Figure B.27 – B, A

gébriquement mais sans une argumentation, preuve (Balacheff, 1982) ou démonstration mathématique (voir Léo).



a) $z_N = e^{i\frac{\pi}{2}}(z)$

rotation de centre O et de angle $\frac{\pi}{2}$ (NOM rectangle et ON = OM).

Figure B.28 – Léo

Deux réponses ont été évidemment influencées par l'observation de la grille donnée dans le graphique. Nous dirions, qu'elles sont des réponses incomplètes (voir AYUMA) ou bien des réponses non attendues (voir E) dont la base est une interprétation du graphique complètement centrée dans l'observation. Observation mise en place à travers une pensée intuitive qui oriente une étude locale et immédiate de la représentation géométrique en question dont les propriétés constituant son existence et qui la valident comme une *autre représentation* d'un même objet mathématique (Duval, 2006b), ne sont pas à disposition.

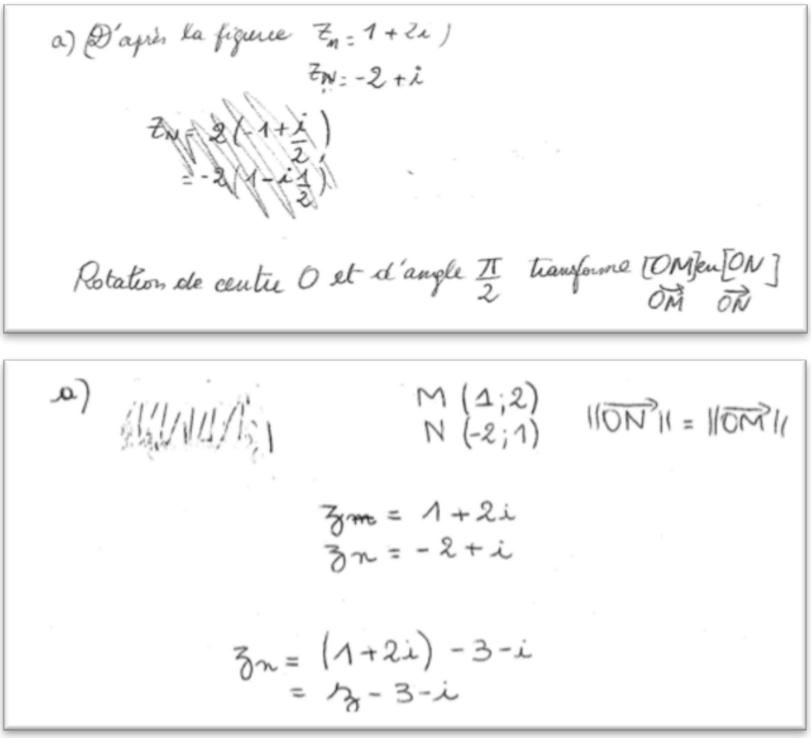
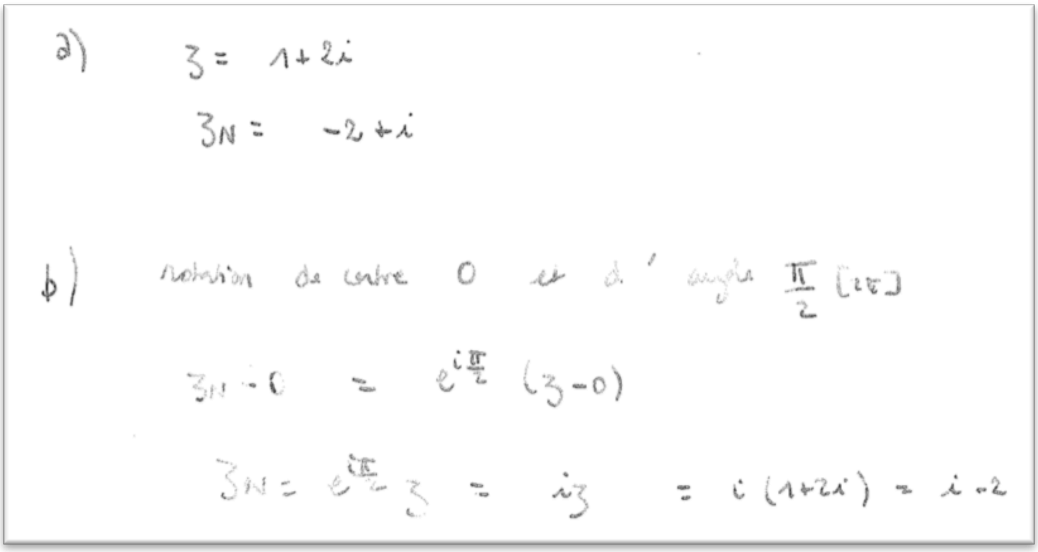


Figure B.29 – Ayuma, E

Néanmoins, ce point de départ à travers des coordonnées intuitives, peut bien rester comme une introduction au développement de la réponse : tout d'abord, l'établissement d'un lien entre les modules égaux (codés sur la figure) et l'inversement des coordonnées (clairement déduit a vue d'œil à travers la grille dans la figure), puis la mise en relation de ces deux informations, à travers la définition algébrique de la multiplication par i. Nous dirions que sa réponse a été d'une certaine façon, dirigée par les formules de rotation comme technologie (Chevallard, 1985) pour la résolution du problème posé. Finalement, la réponse serait bien donnée en fonction de z, telle qu'elle était demandée dans l'énoncé (voir Julie). Nous concluons donc avec la question des paradigmes (Kuzniak, 2010) : une articulation entre eux, pourrait-elle être encore valable à ce niveau de l'enseignement ?



a) $z = 1 + 2i$

$z_N = -2 + i$

b) rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

$z_N - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 0)$

$z_N = e^{i\frac{\pi}{2}} z = iz = i(1+2i) = i - 2$

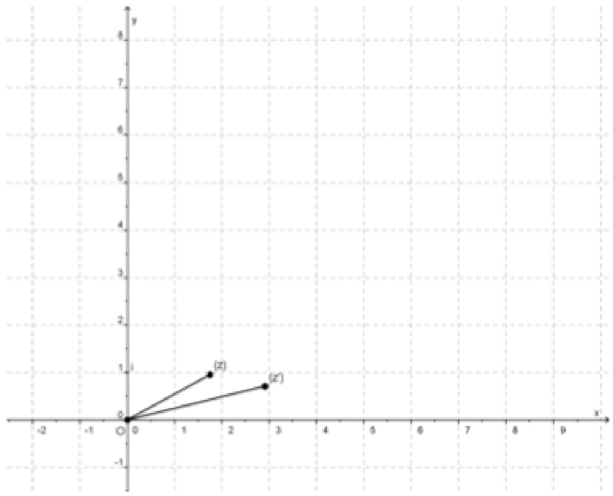
Figure B.30 – Julie

Tableau de classification des réponses attendues et réponses des élèves			
Question 3.a Considérons que z est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$: Déterminer l'affixe du point N en fonction de z et justifier votre réponse.	**Réponse A** Complexe - Géométrique	**Réponse B** Complexe - Expression	**Réponse C** Complexe - calcul
Réponses des élèves	32	20	2

Réponses attendues et leurs analyses respectives

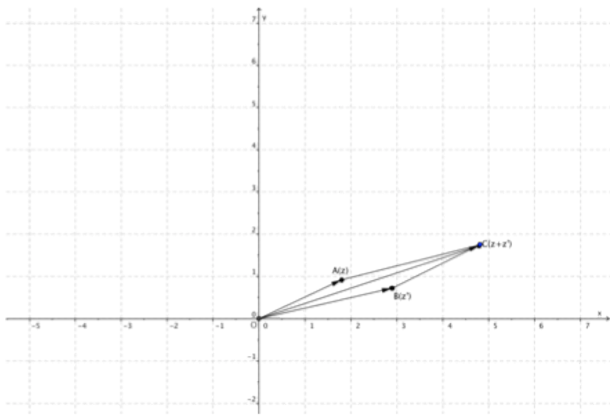
Question 4 : énoncé

Soient deux nombres complexes z et z' tels que $|z| = 2$ et $|z'| = 3$



Question 4.a : Dessiner $z + z'$ et expliquer vos constructions.

Réponse A



On note O l'origine du repère, z l'affixe représentante d'un point A et z' l'affixe d'un point B.

On veut $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. On reporte le vecteur $\overrightarrow{OA}$ à la suite du vecteur $\overrightarrow{OB}$; cela donne le vecteur $\overrightarrow{BC}$ qui est égal au vecteur $\overrightarrow{OA}$. la somme cherchée est donc le vecteur $\overrightarrow{OC}$.

Analyse globale de la tâche et première réponse attendue

Comme réponse à cette question nous attendons le parallélogramme représentant l'addition de deux nombres complexes. L'idée d'introduire une représentation de la somme vise tout simplement à identifier si les élèves font appel aux représentations géométriques déjà apprises, telle que la représentation géométrique de la somme des deux vecteurs.

Par rapport à la construction du produit, elle peut avoir lieu avec ou sans outils géométriques.

Le fait de donner la représentation des modules des deux nombres complexes déterminés, vise à faciliter la réponse et à la limiter à une seule. Sans plus d'indications, nous tenons à ce que les élèves feront leurs constructions à l'aide des éléments donnés dans le graphique. Les propriétés géométriques de l'addition et de la multiplication de vecteurs correspondent au référentiel théorique auquel faire appel pour répondre aux questions. Par contre, une possible intervention intuitive en fonction du travail dans les questions précédents serait aussi envisageable comme nous le verrons plus tard.

Réponse B

Reporter les longueurs en abscisse et en ordonnée, ou bien, mesurer sur la figure : $z \approx 1,8+0,9i$ et $z' \approx 2,9+0,8i$ puis faire la somme $z+z' = (Re(z)+Re(z'))+(Im(z)+Im(z'))i$.

Reporter le résultat pourrait permettre la représentation géométrique de la somme cherchée.

Analyse

Cette réponse relève de la recherche de données qui ne se trouvent pas dans l'énoncé de la question.

L'habitude au calcul serait une des causes de ce raisonnement ainsi que la méconnaissance ou bien l'oubli, de la représentation géométrique de la somme de vecteurs.

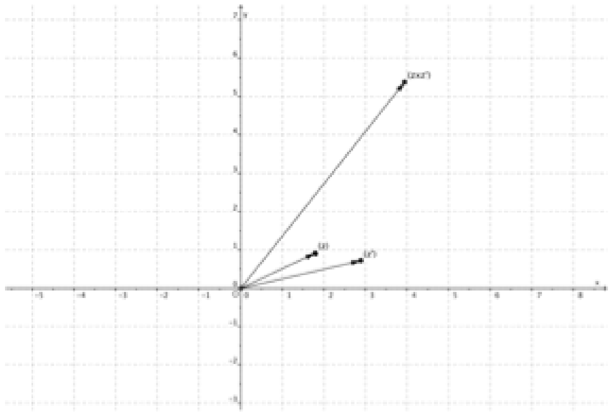
Le passage par la mesure constitue un aspect important à identifier puisqu'il implique une action très concrète sur la figure, qui est complètement éloignée du paradigme géométrique en question à ce niveau de la scolarité. Pour quoi des élèves d'une classe de Terminale S au milieu du chapitre sur les nombres complexes auraient-ils besoin de mesurer ?

La méconnaissance de la représentation du parallélogramme pourrait provoquer des procédures alternatives à une représentation directe.

Finalement, si la consigne de *dessiner* n'a pas été bien comprise, le report du résultat dans le graphique ne fera pas partie de la réponse.

Question 4.b : Dessiner $z \times z'$et expliquer vos constructions

Réponse A



Pour tous nombres complexes z et z' non nuls le produit correspond à la somme des arguments et au produit des modules.

On connaît $|z{\times}z'| = 6$.

On mesure l'angle xOz' et on le reporte sur le vecteur d'abscisse z. Ainsi, on trace le vecteur produit de module 6 et d'angle la somme des arguments de z et z'.

Analyse

La représentation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes, cherche la mise en évidence de propriétés déjà apprises – mais peut-être pas encore visualisées – sur la multiplication de ces nombres : somme des arguments et produit des modules.

Les mesures des arguments ont été omises, de sorte que les élèves puissent, par eux-mêmes, mettre en place cette propriété et tracer le vecteur produit de module $z \times z$'. Ceci, si la propriété des modules est aussi connue.

L'utilisation de tous les outils géométriques est permise, par contre, il n'y a aucune consigne qui indique explicitement où et quand les utiliser. En conséquence, la mesure des angles pourrait bien être mise en place à l'aide du rapporteur. S'ils n'ont pas cet outil à disposition, une construction *à vue d'œil* ou bien une construction règle et compas, serait aussi attendue.

Réponse B

Reporter les longueurs en abscisse et en ordonnée, ou bien, mesurer sur la figure : $z \approx 1,8 + 0,9i$ et z' $\approx 2,9 + 0,8i$ puis multiplier.

Reporter le résultat pourrait permettre la représentation géométrique du produit cherché.

Analyse

Si les propriétés de la représentation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes ne sont pas connues, la recherche des abscisses et des ordonnées de chaque point fait partie d'un processus tout à fait logique en considérant l'importance du calcul dans ce chapitre.

Ils connaissaient déjà la multiplication algébrique de deux nombres complexes, alors, il suffit de mettre les valeurs et donner le résultat.

Si la consigne de *dessiner le produit* a été comprise, il existe la possibilité de compléter cette réponse avec la représentation graphique du *vecteur produit* en reportant les valeurs obtenues dans le calcul.

Tableau de classification des réponses attendues		
Question 4.a Dessiner $z + z'$ et expliquer vos constructions	**Réponse A** Géométrique - Visuelle	**Réponse B** Mesure - Complexe - Calcul
Question 4.b Dessiner $z \times z'$ et expliquer vos constructions	**Réponse A** Géométrique - Visuelle	**Réponse B** Mesure - Complexe - Calcul

Réponses des élèves et leurs analyses respectives

Question 4.a

Dessiner $z + z'$ et expliquer vos constructions

Question 4.b

Dessiner $z \times z'$ et expliquer vos constructions

Classification : Géométrique - Visuelle

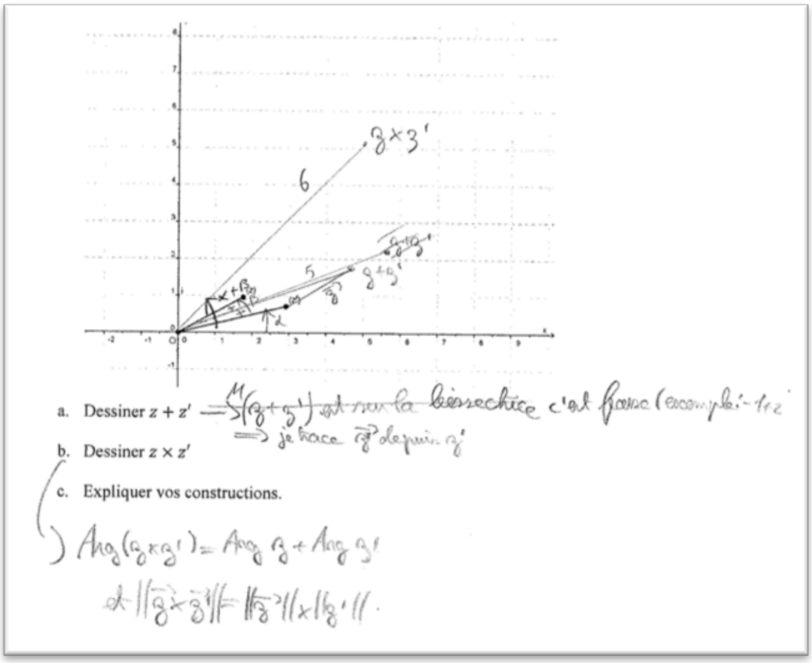


Figure B.31 – Dylan

Les trois premières réponses portent des solutions correctes à la question posée. La disponibilité du parallélogramme permet aux élèves de bien répondre à la première question. De la même manière, la connaissance des propriétés de la multiplication de deux nombres complexes leur a permis de la représenter géométriquement. Dans certains cas, des erreurs dans l'expression exponentielle de l'addition des arguments, n'empêchent pas d'aboutir à ce qui était attendu (voir Julie).

Les réponses de Dylan, B et Julie, ont bien pris en compte la multiplication de modules ainsi que l'addition des arguments. Ce dernier étant représenté sur la figure à travers des co-

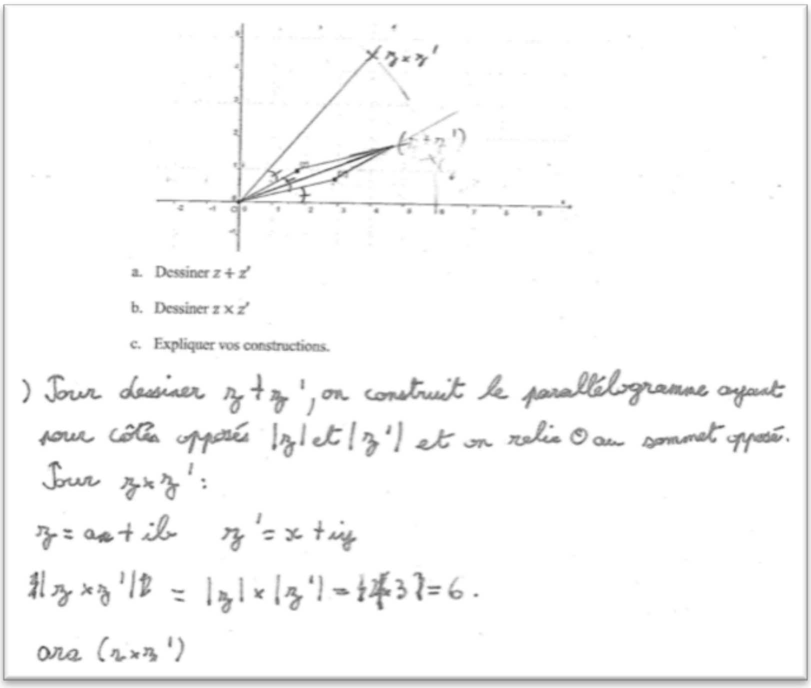


Figure B.32 – B

dages permettant d'identifier l'addition de l'angle de z' plus l'angle de z.

L'inégalité des angles sur la figure, nous permet d'affirmer que les angles n'ont pas été mesurés, c'est-à-dire la propriété était déjà apprise dans un registre de représentation autre que le géométrique. Les élèves ont donc visiblement mise en relation des représentations différents d'un même objet mathématique dans des registres de représentation différents.

Mais ce ne sont pas seulement les réponses correctes celles qui attirent notre attention. En étudiant certaines réponses nous nous posons la question sur l'influence de la configuration de Descartes à ce moment du questionnaire : les angles, n'étant pas absents dans sa multiplication puisqu'elle ne concernait que des rapports de longueurs, ils ne font pas partie explicite de sa description. De ce fait, Lucie, n'a pas remarqué que si nous transposons la configuration de Descartes au plan complexe, la longueur AD ferait partie de l'axe des abscisses de sorte que l'angle représenté aurait donc zéro pour mesure.

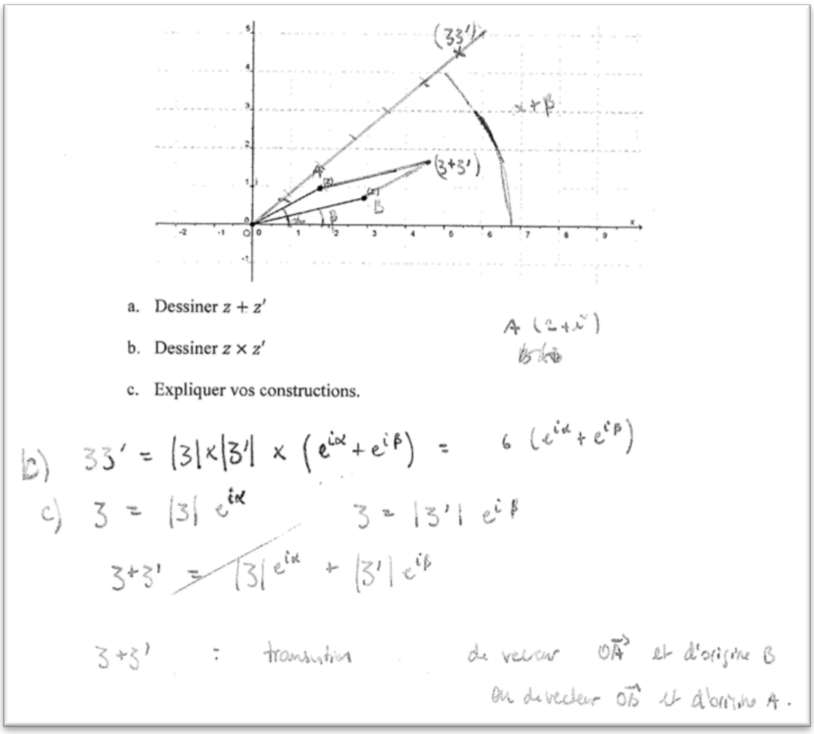


Figure B.33 – Julie

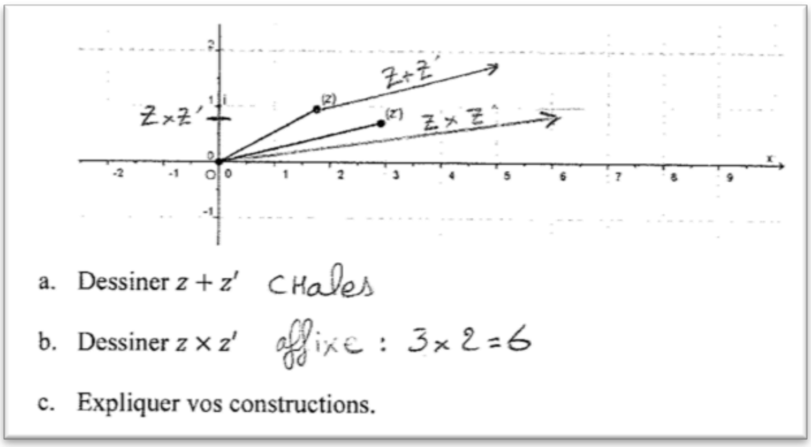


Figure B.34 – Clovis

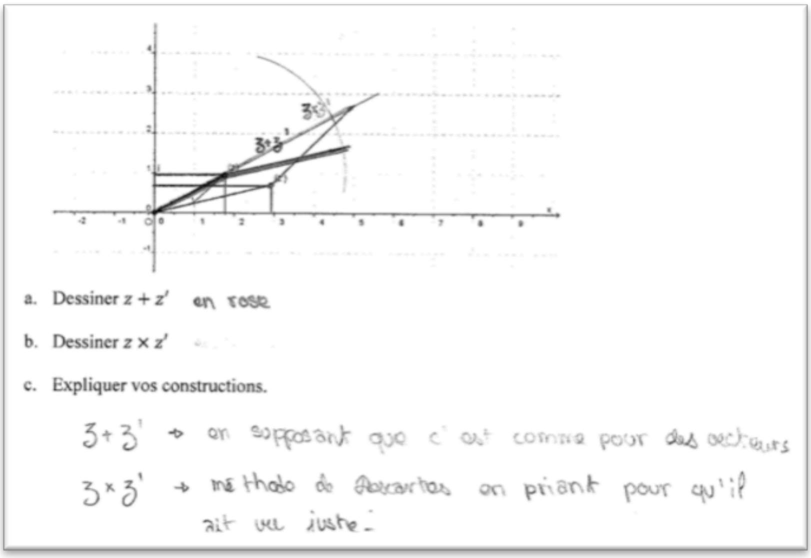


Figure B.35 – Lucie

Les trois dernières réponses sélectionnées, rendent compte d'une part, de la non connaissance ou d'une connaissance partielle des propriétés de la multiplication de deux nombres complexes. Par exemple, dans la troisième réponse (voir Quentin), l'élève a mis en place tout ce qu'il connaît sur la multiplication de nombres complexes, sans aboutir à la représentation géométrique souhaitée. Le plus logique avec sa procédure aurait été d'aller chercher les coordonnées de z et de z' (voir Laureline, même si elle n'a pas traduit au registre numérique son intervention dans la figure), ce qui lui aurait permis d'identifier l'homothétie et la rotation algébrique, pour finalement la convertir du registre numérique à une représentation géométrique.

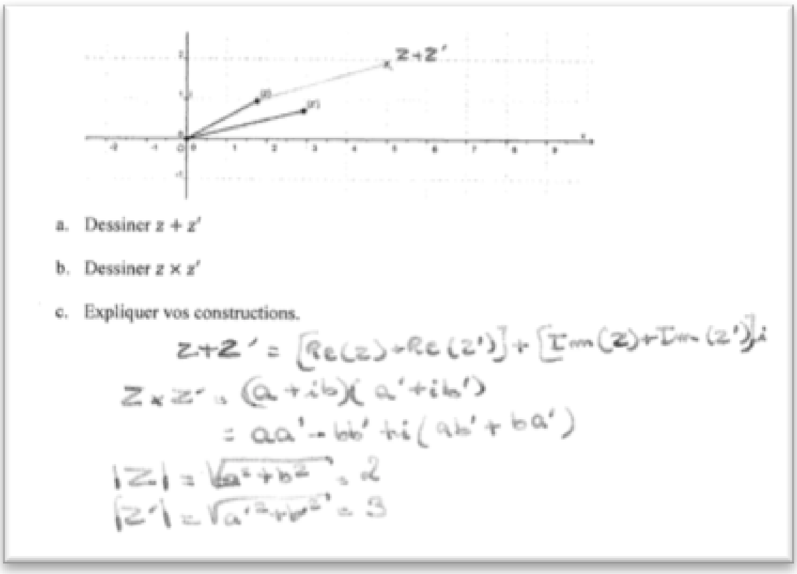
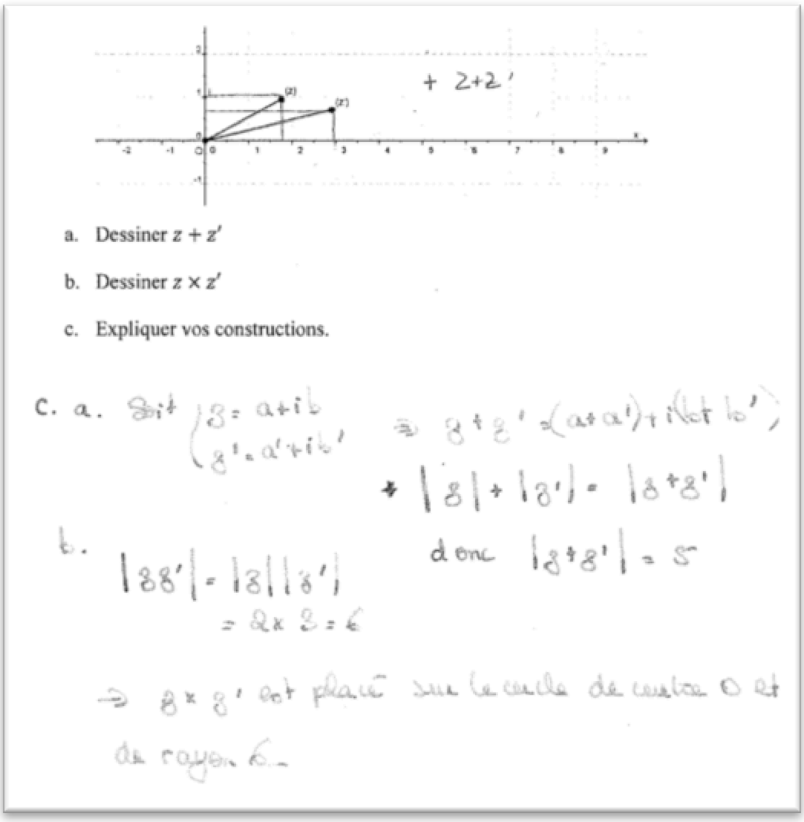


Figure B.36 – Quentin

Sans doute ce processus n'est pas évident, puisqu'il doit être le résultat d'une telle compréhension du contenu en jeu qui permette d'être capables de se questionner sur les connaissances acquises (Duval, 2006b). Ce questionnement serait un moyen de recherche d'applications et de transferts du contenu appris vers d'autres représentations de lui même. Néanmoins, dans des cas comme ceux qui ont été exposés ci-dessus, ce niveau de connaissances, de compréhension et de recherche de sens, n'existe pas ou bien il reste très limité. Ceci, puisque même dans le cas où certains élèves ont abouti à la représentation géométrique du produit (voir Vincent), cette représentation n'est pas le produit d'un changement de registre de représentation sémiotique puisqu'elle ne prends pas en compte toutes les propriétés de la multiplication de deux nombres complexes.



a. Dessiner $z + z'$

b. Dessiner $z \times z'$

c. Expliquer vos constructions.

c. a. Soit $\begin{cases} z = a+ib \\ z' = a'+ib' \end{cases} \Rightarrow z + z' = (a+a') + i(b+b')$

$+ \; |z| + |z'| = |z+z'|$

donc $|z+z'| = 5$

b. $|zz'| = |z||z'|$

$= 2 \times 3 = 6$

$\Rightarrow$ $z \times z'$ est placé sur le cercle de centre O et de rayon 6.

Figure B.37 – Laureline

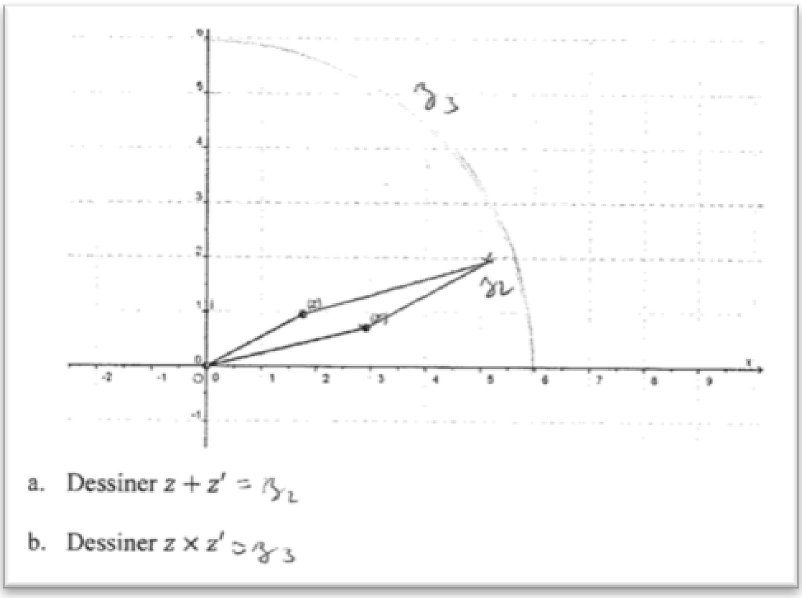


Figure B.38 – Vincent

Tableau de classification des réponses attendues et réponses des élèves		
Question 4.a Dessiner $z + z'$ et expliquer vos constructions	**Réponse A** Géométrique - Visuelle	**Réponse B** Mesure - Complexe - Calcul
Réponses des élèves	54	0
Question 4.b Dessiner $z \times z'$ et expliquer vos constructions	**Réponse A** Géométrique - Visuelle	**Réponse B** Mesure - Complexe - Calcul
Réponses des élèves	11	0

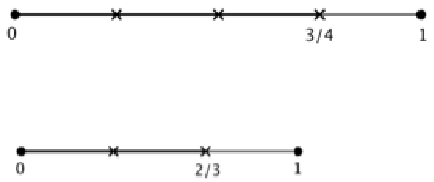
Réponses attendues et leurs analyses respectives

Question 5 : énoncé

Considérez les fractions suivantes comme des longueurs : $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$.

Question 5.a : représenter géométriquement les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ comme des longueurs l et l'.

Réponse A



Les deux fractions peuvent aussi être représentées géométriquement dans des unités de même longueur ou bien sur une même droite.

Analyse globale de la tâche et première réponse attendue

Dans cette question nous traitons la multiplication des fractions. Ce contenu est le moins disponible entre tous ceux qui ont été traités. De ce fait, cette question peut être vue comme la plus expérimentale du questionnaire.

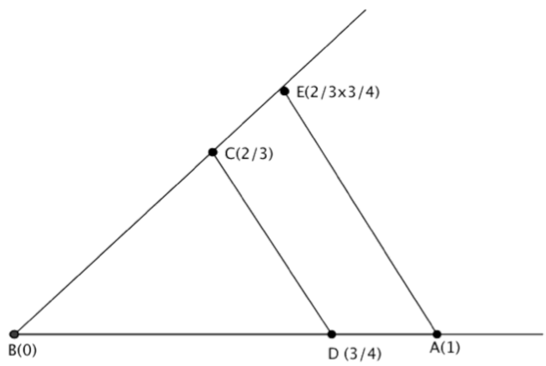
Comme nous le voyons dans l'énoncé, la longueur est une grandeur fixée et la demande de représenter deux fractions comme des longueurs est assez élémentaire. Le but de cette demande consiste à contextualiser les fractions pour introduire les représentations géométriques de la multiplication de fractions dans la question suivante.

Question 5.b : Expliquer les différences et les ressemblances entre $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$ et $l\times l'$ (l'explication peut s'appuyer sur une figure).

Réponse A

La différence entre $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ et $l \times l'$ est la nature des facteurs ce qui a une incidence directe dans la signification du produit. Par exemple, si nous multiplions deux fractions en tant que nombres, le produit sera un nombre.

Si nous considérons $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, comme les mesures de deux longueurs, le produit peut être représentée géométriquement si on considère chaque facteur et le produit même, comme le rapport longueur/unité de façon à ce que l'unité n'existe plus (multiplication de Descartes).



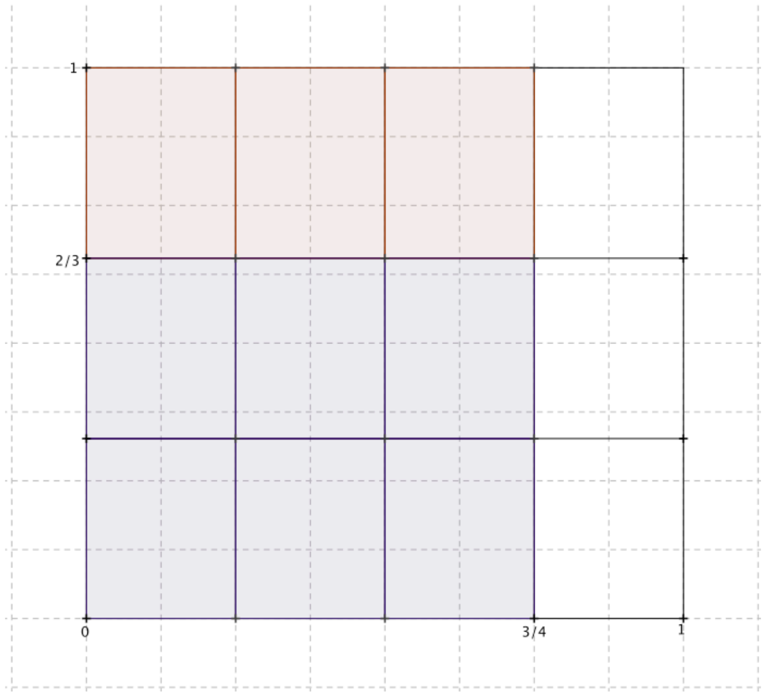
Par contre, du moment où chaque facteur doit être respecté comme une grandeur déterminée, on ne peut plus multiplier des rapports, ce qui nous oblige à sortir du contexte unidimensionnel vers un produit externe : le produit de deux longueurs est une aire (aire d'un rectangle, par exemple).

Finalement, si $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$=$l \times l'$, la ressemblance entre eux est la valeur du produit.

Analyse

Cette question beaucoup plus complexe que la précédente, vise à identifier non seulement les possibilités des élèves de rendre visuel le produit de deux fractions mais aussi leurs possibilités de différencier les différents types de produit fractionnaire lesquels dépendent de la nature des facteurs :

- Deux nombres ont comme produit un nombre.
- Deux longueurs ont comme produit une aire.
- Les mesures de deux longueurs peuvent avoir comme produit soit une aire, soit une longueur.



Ce dernier point en accord avec la multiplication de Descartes.

Tableau de classification des réponses attendues	
Question 5.a Représenter géométriquement les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ comme des longueurs l et l'.	**Réponse A** Géométrique - Visuelle
Question 5.b Expliquer les différences et les ressemblances entre $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ et $l \times l'$ (l'explication peut s'appuyer sur une figure).	**Réponse A** Géométrique - Visuelle

Réponses des élèves et leurs analyses respectives

Question 5.a

Représenter géométriquement les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ comme des longueurs l et l'.

Question 5.b

Expliquer les différences et les ressemblances entre $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ et $l \times l'$ (l'explication peut s'appuyer sur une figure).

Classification : Géométrique - Visuelle

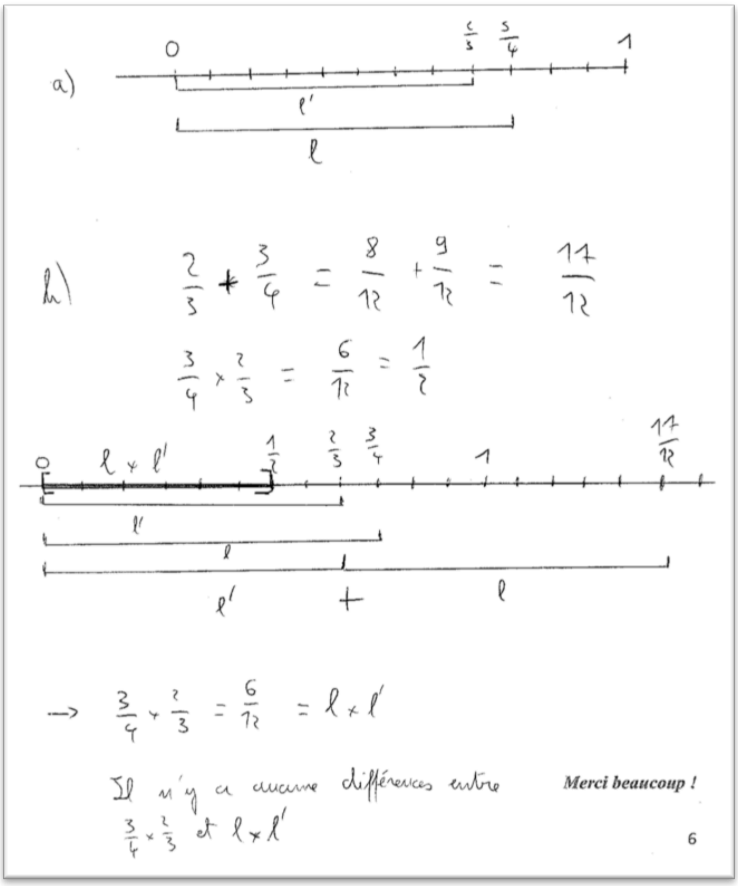


Figure B.39 – G

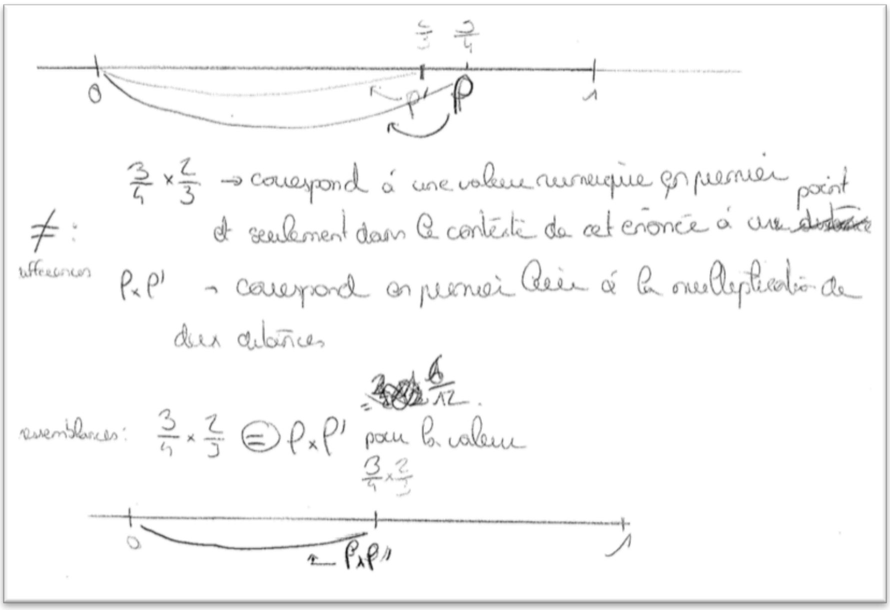


Figure B.40 – Simon

Dans les deux réponses (G et Simon), les élèves sont d'accord dans la représentation géométrique et la valeur du produit des longueurs et des fractions, néanmoins leurs conclusions par rapport aux différences entre les deux produits sont opposées. Pour *G* il n'y a pas des différences puisqu'il ne contextualise pas *l* comme une longueur déterminée : il le situe dans la droite numérique puis il ne fait que comparer la valeur des produits. En revanche, Simon établi une différence entre la signification du produit des deux fractions : dans un contexte déterminé, celui de l'énoncé, la valeur du produit est un nombre représenté géométriquement par un point. Par contre, dans le cas de *l* fois *l*', cette même valeur correspond au produit de deux distances. Néanmoins, la représentation géométrique de la multiplication de deux *distances* avec une configuration de Descartes n'a pas été mise en place mais le produit a bien été représenté comme une distance déterminée par rapport à l'origine.

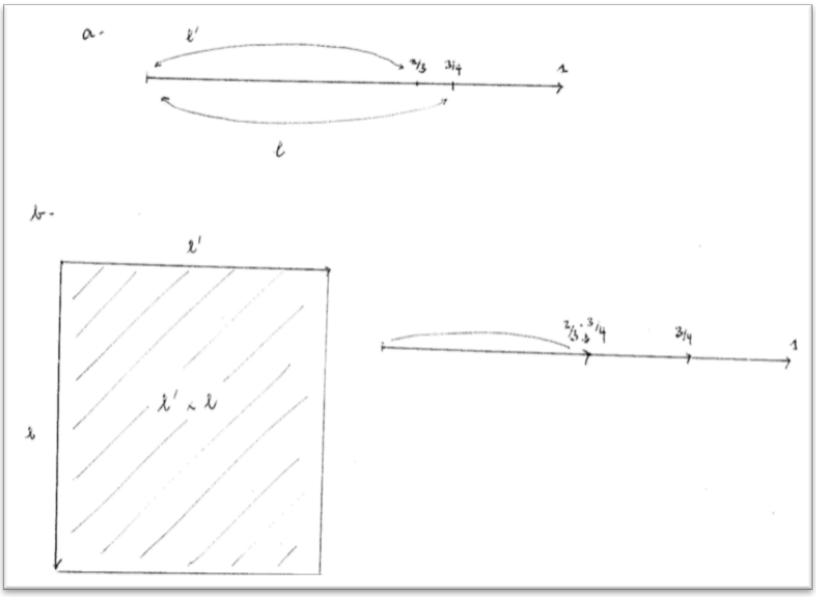


Figure B.41 – Samuel

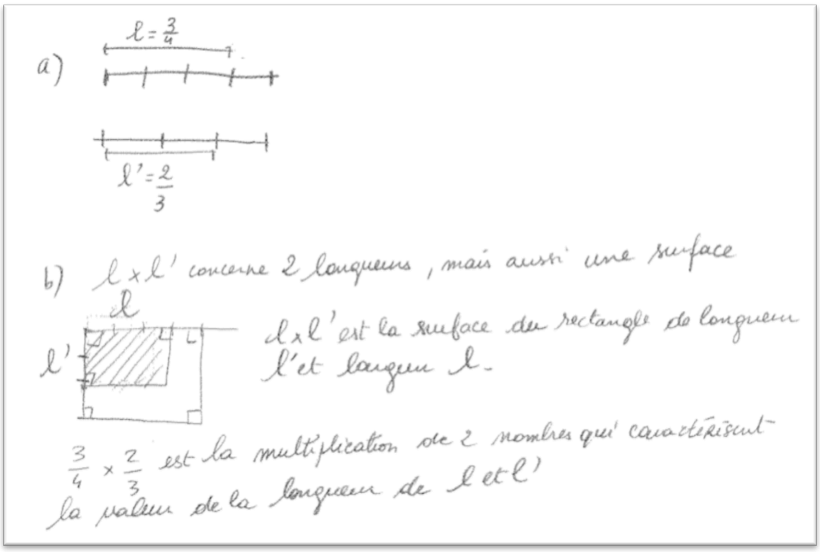


Figure B.42 – Ayuma

Les deux réponses, celles de Samuel et Ayuma, à différences des précédentes, coïncident dans leurs conclusions même si elles ont été exprimées d'une façon différente. Pour Samuel, les mots sont complètement absents dans sa réponse, de sorte que toute explication a été donnée géométriquement. De ce fait, nous pouvons interpréter le produit de deux fractions comme un point sur la droite numérique représentant une distance par rapport à l'origine et le produit de deux longueurs comme l'aire d'une surface.

Ayuma, allant beaucoup plus loin dans son interprétation, reconnaît l'égalité de la valeur de la multiplication de deux fractions et de deux longueurs en spécifiant que le produit de deux fractions n'est pas indépendant d'un contexte déterminé : le produit de deux fractions est un nombre caractérisant la valeur de deux longueurs. Par ailleurs, et tout à fait d'accord avec Samuel, la multiplication de *l* fois *l'* *concernant deux longueurs* a pour produit une surface.

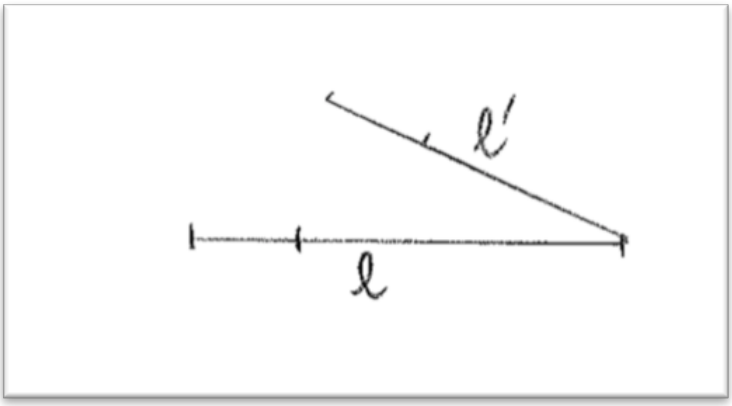


Figure B.43 – Eloïse

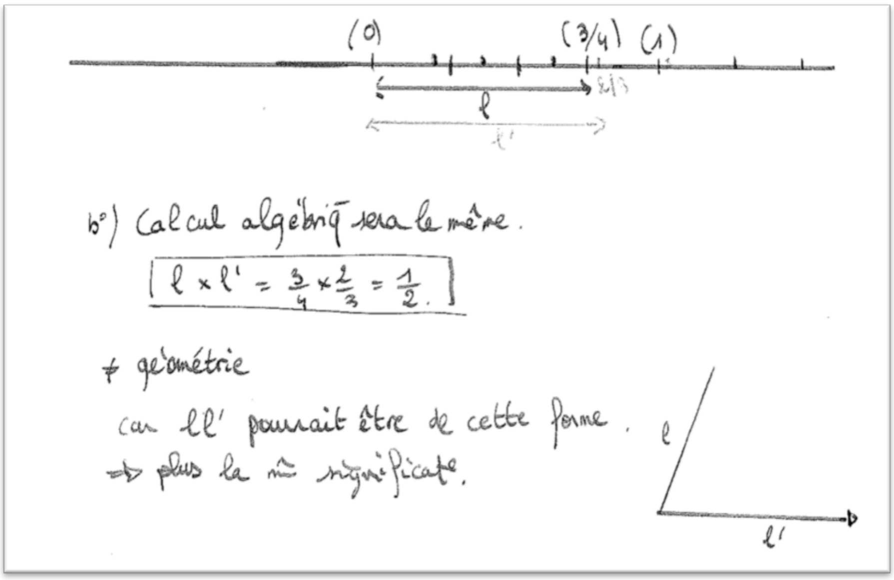


Figure B.44 – Julien

Évidemment, les deux réponses d'Eloïse et Julien ont un intérêt particulier puisque les deux élèves ont repris des configurations qui ressemblent à celle proposée par Descartes.

Julien, détermine que la ressemblance entre les deux multiplications est la valeur du produit, ce qui est correct même s'il a établi une équivalence entre ce qui correspond à un calcul algébrique et un calcul numérique. Ensuite, il représente les facteurs de la multiplication de l fois l', en exprimant que la signification entre les deux multiplications (de fractions et de longueurs) n'est plus la même en géométrie. Par contre, nous ne pouvons pas comparer les produits puisqu'il n'a pas été représenté dans la configuration (de même pour Eloïse) et il n'y a pas une représentation géométrique de la multiplication de deux fractions. Néanmoins, par rapport à la figure de Julien, laquelle n'est pas tout à fait la même que celle d'Eloïse étant donné qu'il y a une sorte de repère qui n'a pas le même sens de notre configuration de départ et dont un axe a bien été représenté par une flèche, nous pourrions conjecturer qu'il aurait peut-être voulu repérer un produit de deux longueurs ne correspondant pas à l'aire euclidienne usuelle mais à la représentation du produit scalaire comme une aire.

Ce qui est intéressant dans ces deux réponses est la reprise des configurations proches à celle de Descartes, ce qui nous permettrait de constater non seulement la prise en compte mais aussi l'influence de cette multiplication à partir du traitement mis en place tout au long du questionnaire.

Classification : autres réponses

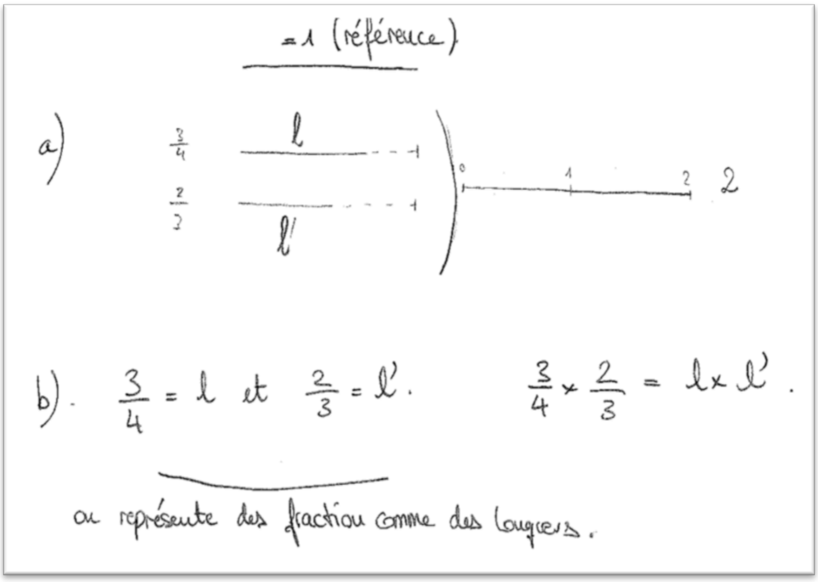
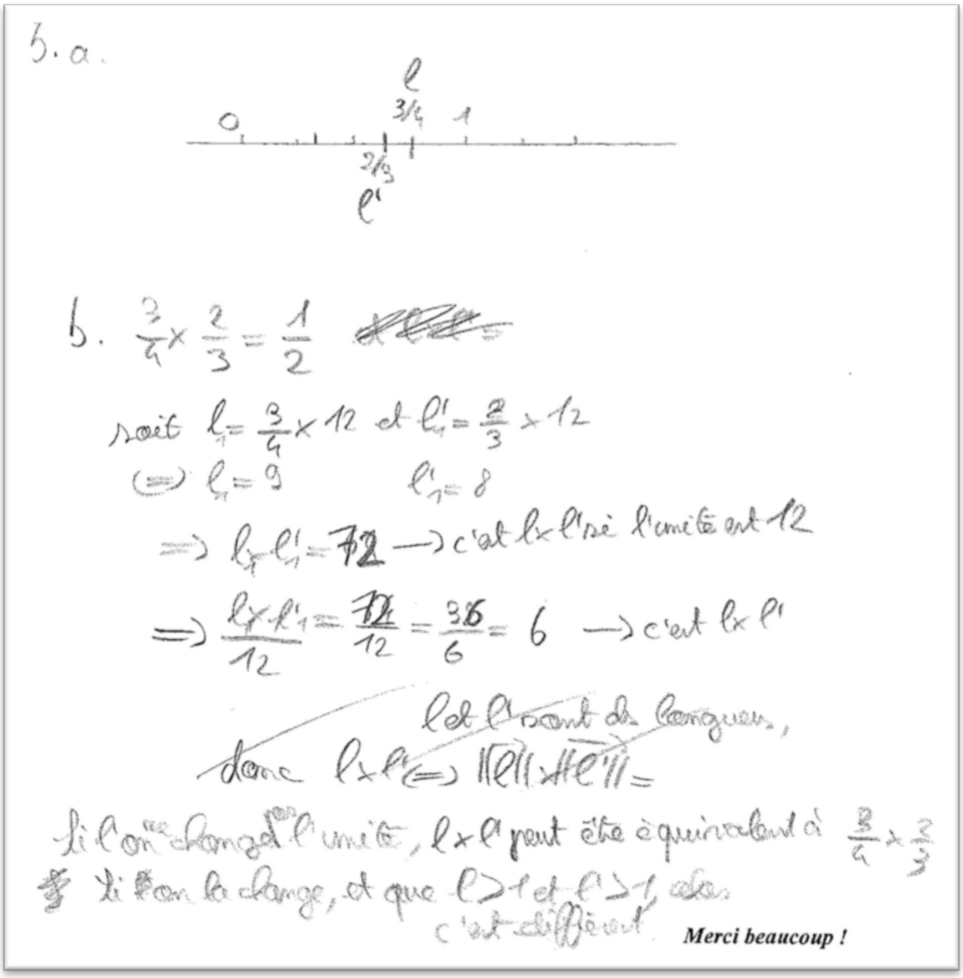


Figure B.45 – Martin

D'autres réponses nous ont seulement permis de déterminer qu'il existe une ressemblance entre les deux multiplications puisque nous pouvons représenter des fractions comme des longueurs (voir Martin). Dylan, tout à fait d'accord avec cette ressemblance, fait une différence dans sa réponse par rapport à celle de Martin, en allant jusqu'à exprimer la différence, laquelle il situe en fonction de l'unité et de la longueur des fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$.

D'autres exemples nous montrent des réflexions des élèves à travers lesquelles ils recherchaient, sans être explicitement demandé dans l'énoncé, des différences et des ressemblances liées aux traitements possibles de la multiplication dans différentes registres de représentation : numérique et géométrique. C'est ainsi que Léo (ci-dessous) détermine ce qui lui est possible de faire avec les fractions dans un registre géométrique : “géométriquement on peut appliquer la multiplication et la division”, par contre, multiplier arithmétiquement, “ce n'est pas naturel” pour lui. Léo, veut-il dire que ce n'est pas possible de le visualiser ? De comprendre son sens ?


5. a.

l

0    $3/4$ 1

$2/3$

l'

b. $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

soit $l_1=\frac{3}{4}\times 12$ et $l'_1=\frac{2}{3}\times 12$

$\Leftrightarrow l_1=9$ $l'_1=8$

$\Rightarrow l_1 \cdot l'_1 = 72$ → c'est l×l' si l'unité est 12

$\Rightarrow \frac{l_1\times l'_1}{12}=\frac{72}{12}=\frac{36}{6}=6$ → c'est l×l'

~~l et l' sont des longueurs,~~

~~donc $l\times l' \Leftrightarrow \|l\| \times \|l'\| =$~~

Si l'on ne change pas l'unité, l×l' peut être équivalent à $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

si l'on la change, et que $l>1$ et $l'>1$, alors c'est différent

Merci beaucoup !

Figure B.46 – Dylan

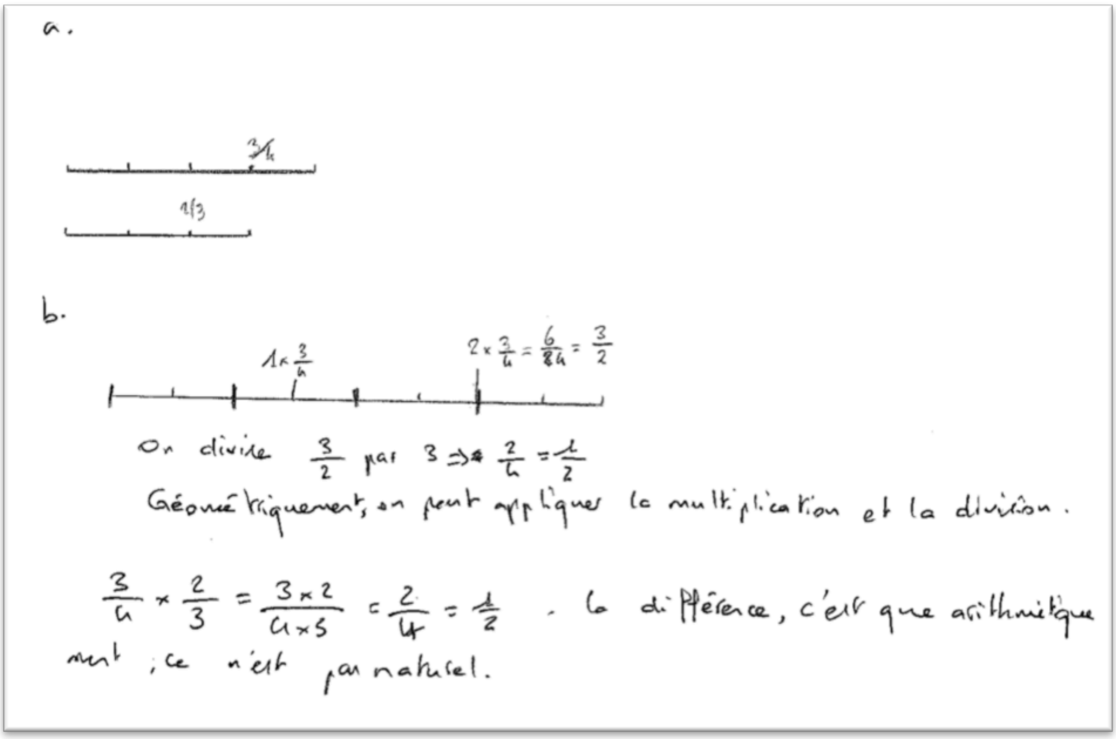


Figure B.47 – Léo

Tableau de classification des réponses attendues	
Question 5.a Représenter géométriquement les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$ comme des longueurs$l$ et l'.	**Réponse A** Géométrique – Visuelle
Réponses des élèves	67
Question 5.b Expliquer les différences et les ressemblances entre $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ et $l \times l'$ (l'explication peut s'appuyer sur une figure).	**Réponse A** Géométrique – Visuelle
Réponses des élèves	5

Annexe C

Séquence d'apprentissage classe de Terminale S

Séance expérimentale　　　　　　　　　　　　　　　Travail à deux
Classes de Terminale S

Travail avec annexe 1

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication. Nous vous présentons aussi son texte historique la décrivant.

I. **Lire le texte de Descartes, puis observer la configuration « Figure A » pour répondre à la question suivante :**

a. **Nous proposons *AB = 1 cm. BE,* est-il bien le produit annoncé par Descartes ? Qu'en pensez-vous ?**

Figure C.1 – Séquence page 1

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Annexe 1

Soit par exemple AB l'unité et qu'il faille multiplier BD par BC ; je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer la parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).

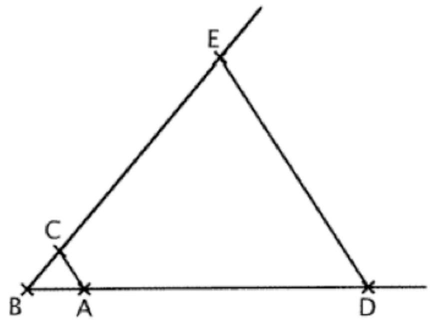


Figure A

Figure C.2 – Séquence page 2

Séance expérimentale Travail à deux
Classes de Terminale S

Travail avec annexe 2

II. Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

a. Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :
   - Sachant que $BA = 1cm$ placer D entre B et A.
   - Construire E pour que BE donne le produit de la multiplication de BD par BC.

b. Décrire votre construction et expliquer pour quoi elle peut être considérée comme analogue à la multiplication de Descartes.

Figure C.3 – Séquence page 3

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Annexe 2

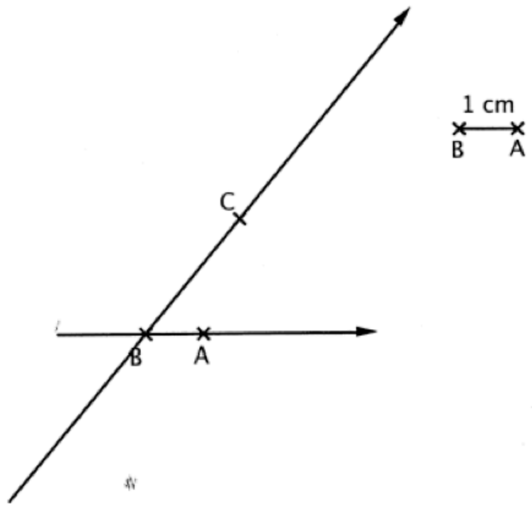


Figure B

Figure C.4 – Séquence page 4

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Travail avec annexe 3

III. Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point *A* d'abscisse +1 et du côté négatif le point *D* d'abscisse -2.

a. Projeter orthogonalement les points C et E sur l'axe des abscisses. Pouvez-vous justifier que l'abscisse du point E est le produit des abscisses des points D et C ? Comment ?

b. Si de manière plus générale, l'abscisse du point *C* est $x_C > 0$ et l'abscisse du point *D* est $x_D < 0$, décrire la représentation géométrique du point *E* sur *(BC)* d'abscisse $x_E = x_C x_D$.

Figure C.5 – Séquence page 5

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Annexe 3

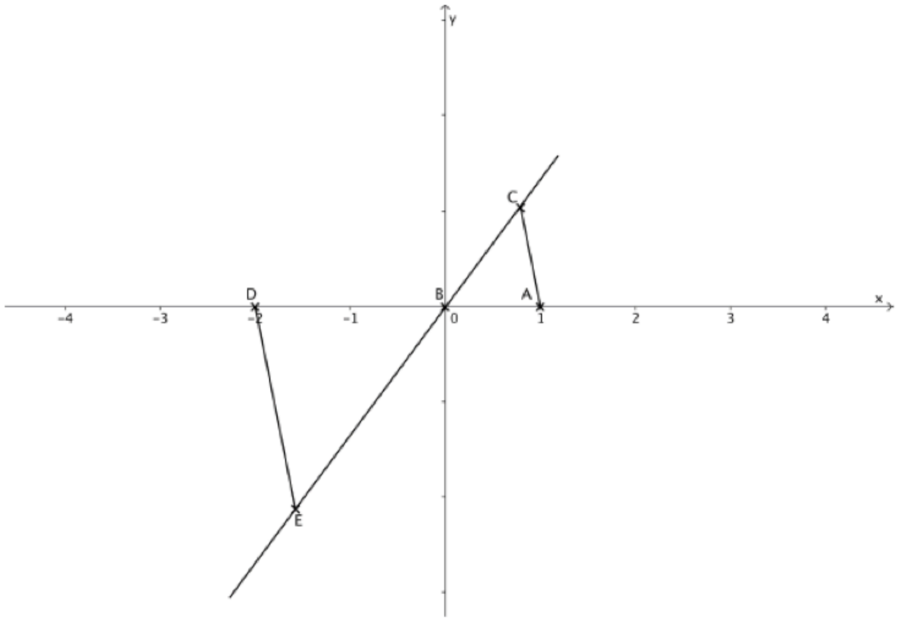


Figure C

Figure C.6 – Séquence page 6

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Travail avec annexe 4

IV. Nous allons étudier une nouvelle configuration, similaire à la configuration précédente, mais celle-ci est située dans le plan complexe avec certains éléments complémentaires.

a. Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$, un repère orthonormal direct du plan appelé plan complexe. Nous vous rappelons qu'un nombre complexe est appelé affixe d'un point M et d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$. Utiliser les informations données sur la configuration « Image D » pour répondre aux questions suivantes :

- Pouvez-vous affirmer que dans cette représentation géométrique, la multiplication de z et z' donne toujours le produit z'' (affixe du point E et du vecteur $\overrightarrow{BE}$) ? Expliquez votre réponse.

Figure C.7 – Séquence page 7

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

- **Dans votre réponse à la question précédente, avez-vous établi des liens entre $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{BD}\|$ et $\|\overrightarrow{BE}\|$? Lesquels ? Et entre ÂOC, ÂOD (les angles associés aux facteurs) et ÂOE (l'angle associé au produit) ? Si vous ne les avez pas encore considérés, quels liens établiriez-vous entre ces éléments pour expliquer la représentation géométrique de deux nombres complexes ?**

Figure C.8 – Séquence page 8

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Annexe 4

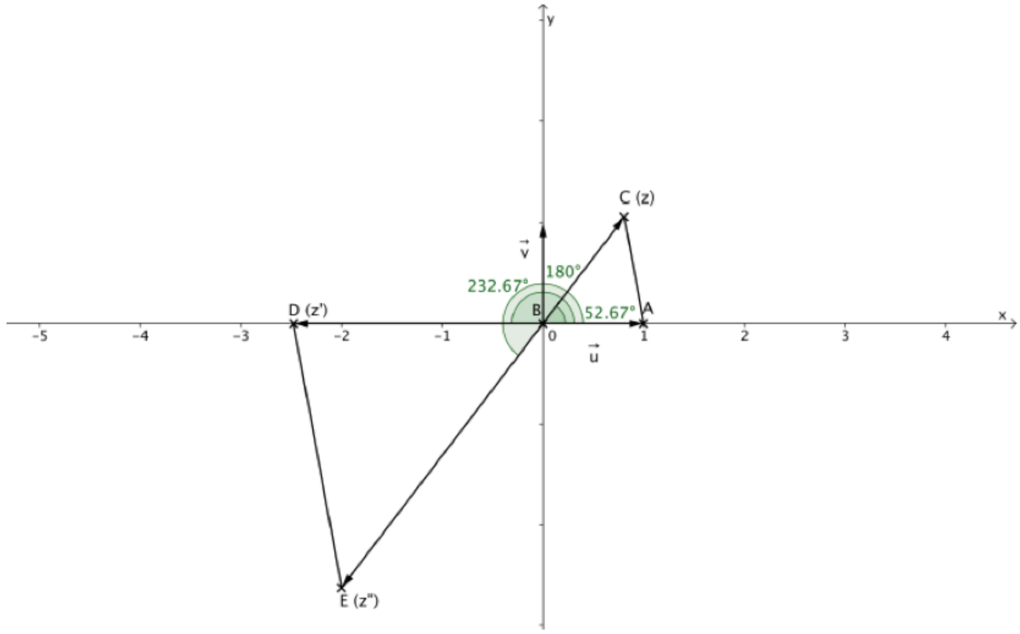


Figure D

Figure C.9 – Séquence page 9

Séance expérimentale Travail à deux
Classes de Terminale S

Travail avec annexe 5

b. Observez les représentations géométriques de deux nombres complexes dans la configuration « Figure E ».

- En prenant en compte tes réponses dans les questions précédentes construire la représentation géométrique du produit de z et z'.

- Décrire votre construction.

Figure C.10 – Séquence page 10

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Annexe 5

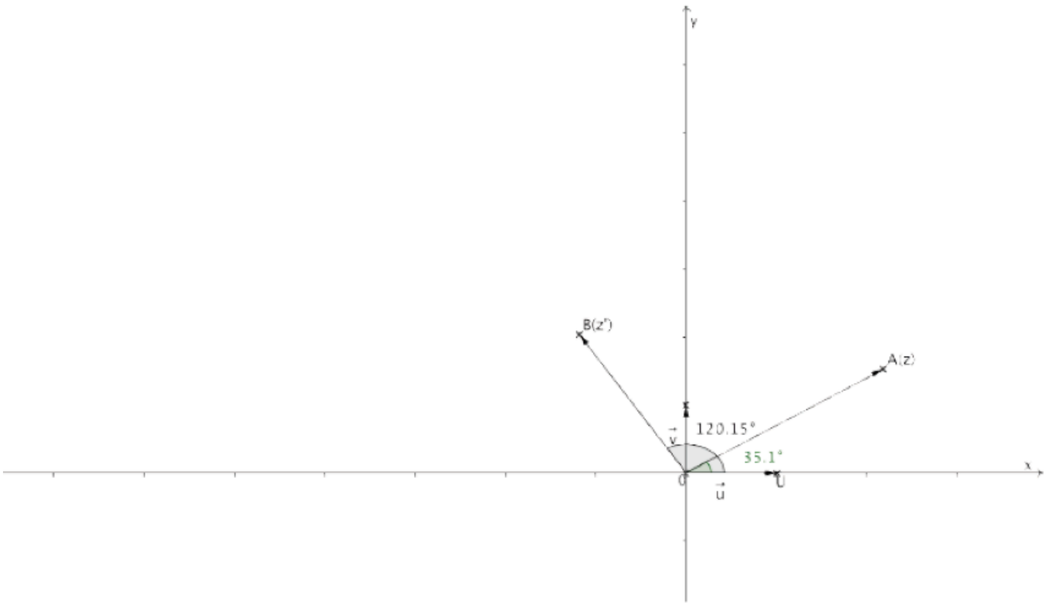


Figure E

Figure C.11 – Séquence page 11

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

V. **En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle signification géométrique pouvez-vous donner à la multiplication ?**

Figure C.12 – Séquence page 12

Annexe D

Séquence d'apprentissage classe de Quatrième

Séance expérimentale
Classes de Quatrième

Travail à deux

Travail avec annexe 1

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication.

I. **Observer et interpréter la configuration « Figure A» pour répondre à la question suivante :**

a. **En définissant *AB* comme l'unité de longueur, Descartes affirme que la multiplication de *BD* par *BC* permet d'obtenir *BE* comme produit. Est-ce vrai ? Qu'en pensez-vous ? Expliquez votre réponse.**
b. **Sur la même configuration (Figure A), placer un point D' sur la demi-droite [BD) et construire E' tel que BE' soit le produit de BD' par BC.**

Figure D.1 – Séquence page 1

Séance expérimentale | Travail à deux
Classes de Quatrième

Annexe 1

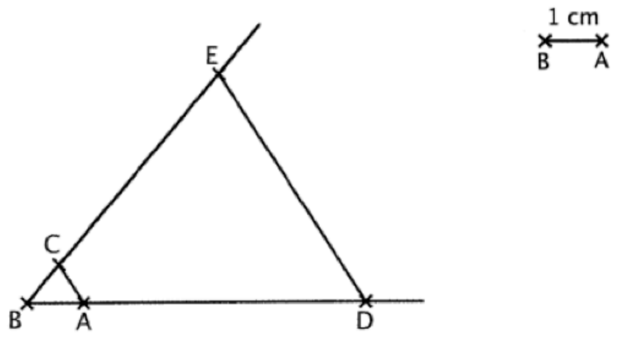


Figure A

Figure D.2 – Séquence page 2

Séance expérimentale Travail à deux
Classes de Quatrième

Travail avec annexe 2

II. Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

a. Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :
   - Sachant que $BA = 1cm$, placer D entre B et A.
   - Construire E pour que BE donne le produit de la multiplication de BD par BC.

b. Décrivez votre construction et expliquez pourquoi elle peut être considérée comme analogue (avec les mêmes caractéristiques) à la construction de Descartes.

Figure D.3 – Séquence page 3

Séance expérimentale
Classes de Quatrième

Travail à deux

Annexe 2

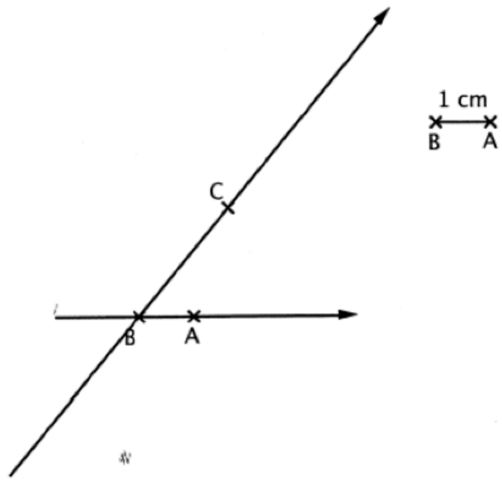


Figure B

Figure D.4 – Séquence page 4

Séance expérimentale Travail à deux
Classes de Quatrième

Travail avec annexe 3

III. Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point A d'abscisse +1 et du côté négatif le point D d'abscisse -2.

a. Pouvez-vous expliquer le fait que dans cette configuration géométrique, BE donne toujours le produit de BD par BC ? Comment ?

b. Pour conclure, décrire la représentation géométrique du produit entre un nombre négatif et un nombre positif. Considérez la position des facteurs et du produit par rapport au point B et au segment $[BC]$.

Figure D.5 – Séquence page 5

Séance expérimentale | Travail à deux
Classes de Quatrième

Annexe 3

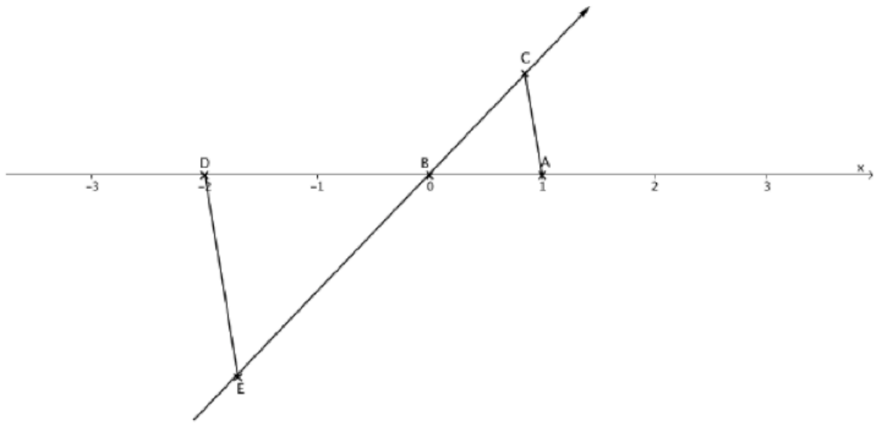


Figure C

Figure D.6 – Séquence page 6

Séance expérimentale   Travail à deux
Classes de Quatrième

IV. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle (s) signification (s) géométrique (s) pouvez-vous donner à la multiplication ?

Figure D.7 – Séquence page 7

Annexe E

Tableaux d'éléments de réponse à toute la séquence

E.1 Tableaux de réponses Question 4b et 4a

CLASSE 1 (C1)

-	4.b								4.a							
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C1-I1		X							X							
C1-I2		X								X						
C1-I3		X							X							
C1-I4			X									X				
C1-I5						X			X							
C1-I6	X												X			
C1-I7						X				X						
C1-I8						X								X		
C1-I9	X								X							
C1-I10		X														X
C1-I11				X								X				
C1-I12						X						X				
C1-I13							X			X						
C1-I14							X							X		
C1-I15	X														X	
Total	3	4	1	1	0	4	2	0	4	3	0	3	1	2	1	1

CLASSE 2 (C2)

-	**4.b**								**4.a**							
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C2-I1	X										X					
C2-I2	X								X							
C2-I3				X					X							
C2-I4	X									X						
C2-I5					X					X						
C2-I6	X								X							
C2-I7	X								X							
C2-I8		X										X				
Total	5	1	0	1	1	0	0	0	4	2	1	1	0	0	0	0

CLASSE 3 (C3)

-	**4.b**								**4.a**							
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C3-I1	X								X							
C3-I2								X		X						
C3-I3	X								X							
C3-I4				X											X	
C3-I5					X											X
C3-I6		X										X				
C3-I7	X⋆											X				
C3-I7	3	1	0	1	1	0	0	1	2	1	0	2	0	0	1	1

CLASSE 4 (C4)

-	**4.b**								**4.a**							
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C4-I1	X									X						
C4-I2					X				X							
C4-I3					X				X							
C4-I4					X				X							
Total	1	0	0	0	3	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0

E.2 Tableaux de réponses Question 3b et 3a

CLASSE 1 (C1)

-	3.b								3.a						
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
C1-I1				X					X						
C1-I2				X					X						
C1-I3				X					X						
C1-I4	X									X					
C1-I5				X					X						
C1-I6						X					X				
C1-I7	X									X					
C1-I8								X		X					
C1-I9	X								X*						
C1-I10	X								X*						
C1-I11				X											X
C1-I12				X						X					
C1-I13	X														X
C1-I14				X					X*						
C1-I15						X				X					
Total	5	0	0	7	0	2	0	1	7	5	1	0	0	0	2

CLASSE 2 (C2)

-	3.b								3.a						
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
C2-I1		X								X					
C2-I2				X					X						
C2-I3			X							X					
C2-I4	X								X						
C2-I5	X									X					
C2-I6					X				X						
C2-I7					X					X					
C2-I8								X					X		
Total	2	1	1	1	2	0	0	1	3	4	0	0	1	0	0

CLASSE 3 (C3)

–	3.b								3.a						
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
C3-I1			X						X						
C3-I2					X				X						
C3-I3					X									X	
C3-I4				X								X			
C3-I5							X		X						
C3-I6								X	X⋆						
C3-I7					X					X					
Total	0	0	1	1	3	0	1	1	4	1	0	1	0	1	0

CLASSE 4 (C4)

–	3.b								3.a						
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
C4-I1			X							X					
C4-I2		X											X⋆		
C4-I3		X											X		
C4-I4	X								X						
Total	1	2	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	0	0

E.3 Tableaux de réponses Question 2b et 1

CLASSE 1 (C1)

-	2.b								1	
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**
C1-I1							X		X	
C1-I2					X				X	
C1-I3						X			X	
C1-I4		X							X	
C1-I5						X			X	
C1-I6				X					X	
C1-I7				X					X	
C1-I8	X								X	
C1-I9				X					X	
C1-I10	X								X	
C1-I11						X			X	
C1-I12						X			X	
C1-I13						X			X	
C1-I14						X			X	
C1-I15	X								X	
Total	3	1	0	3	1	6	1	0	15	0

CLASSE 2 (C2)

-	2.b								1	
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**
C2-I1	X								X	
C2-I2	X								X	
C2-I3		X							X	
C2-I4					X				X	
C2-I5						X			X	
C2-I6	X								X	
C2-I7		X							X	
C2-I8						X			X	
Total	3	2	0	0	1	2	0	0	8	0

CLASSE 3 (C3)

-	2.b								1	
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**
C3-I1					X				X	
C3-I2								X	X	
C3-I3	X								X	
C3-I4					X				X	
C3-I5			X							X
C3-I6		X							X	
C3-I7							X		X	
Total	1	1	1	0	2	0	1	1	6	1

CLASSE 4 (C4)

-	2.b								1	
Gr	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**1**	**2**
C4-I1								X	X	
C4-I2		X							X	
C4-I3				X					X	
C4-I4				X					X	
Total	0	1	0	2	0	0	0	1	4	

Annexe F

Arbre de similarité : éléments de réponse à toute la séquence en classe de TS

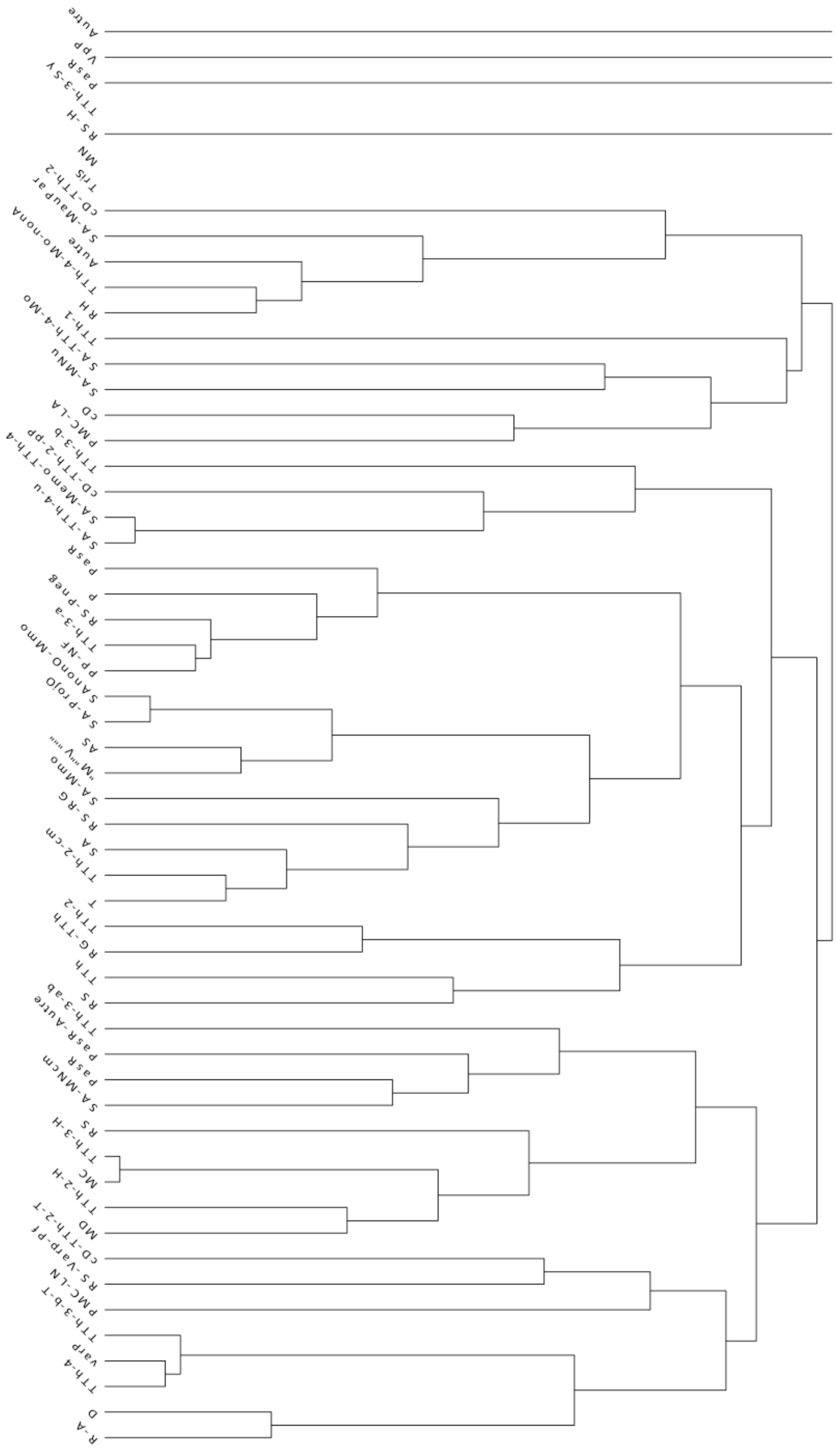


Figure F.1 – Arbre de similarités en fonction des éléments de réponse à la dernière question ainsi que des réponses *a posteriori* dans toute la séquence

Annexe G

Arbre cohésitif : éléments de réponse à toute la séquence en classe de TS

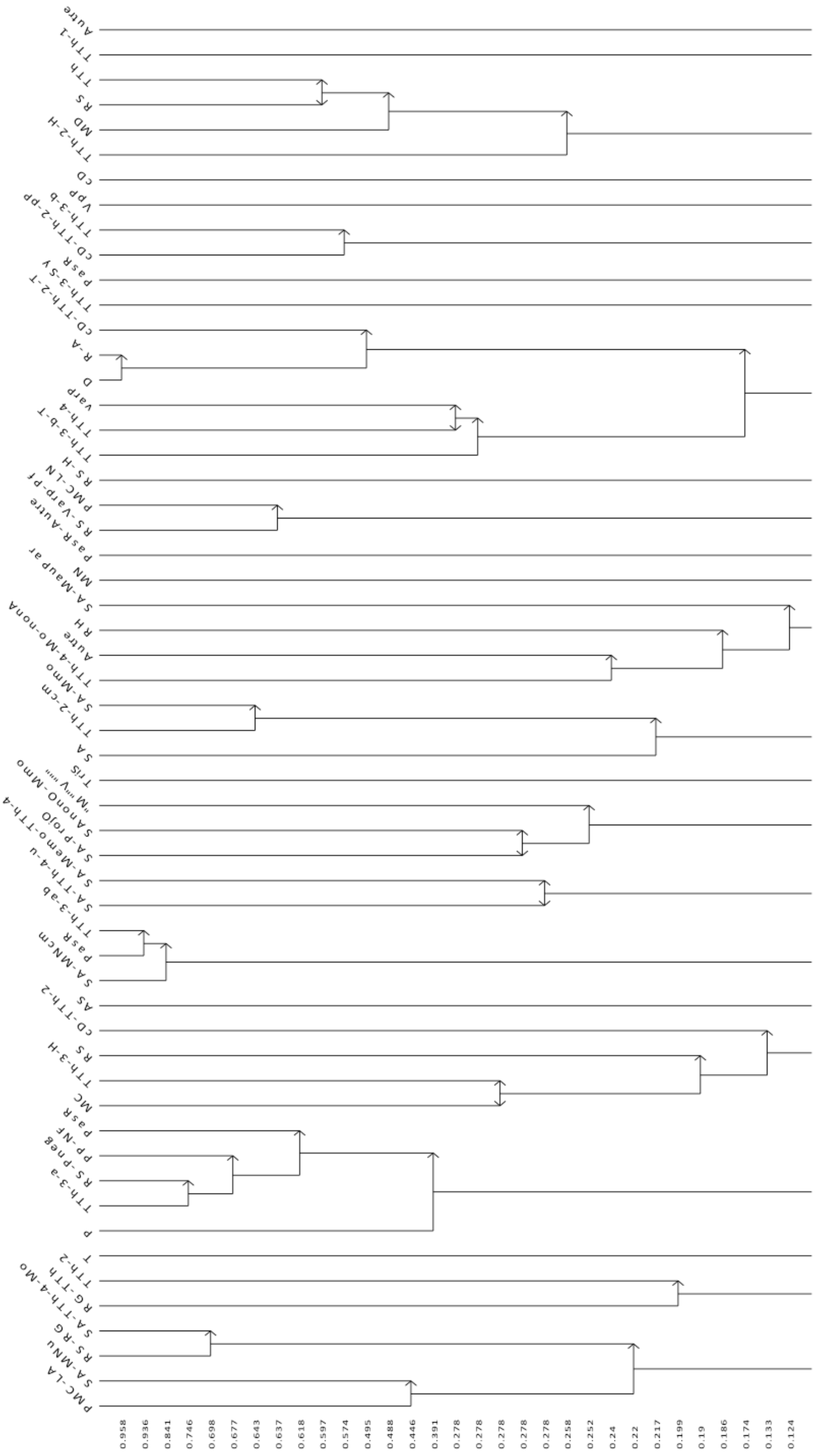


Figure G.1 – Arbre de cohésitif en fonction des éléments de réponse à la dernière question ainsi que des réponses *a posteriori* dans toute la séquence

Annexe H

Réponses des individus à chacune des question de la séquence en lien avec leur classification en fonction de leur réponse à la dernière question

-	T-S-RS					
Gr	**4.b**	**4.a**	**3.b**	**3.a**	**2.b**	**1**
C1-9	2	2	1	1	4	1
C1-2	1	1	4	1	5	1

-	T-S-nonRS					
Gr	**4.b**	**4.a**	**3.b**	**3.a**	**2.b**	**1**
C4-4	5	1	1	1	8	1
C4-1	1	2	3	2	4	1
C1-6	1	5	6	3	4	1
C1-8	6	6	8	2	1	1

-	T-nonS-nonRS					
Gr	**4.b**	**4.a**	**3.b**	**3.a**	**2.b**	**1**
C1-3	2	1	4	1	6	1
C1-5	6	1	4	1	6	1
C1-7	6	2	1	2	4	1
C2-2	1	1	4	1	1	1

-	C-nonS-nonRS					
Gr	**4.b**	**4.a**	**3.b**	**3.a**	**2.b**	**1**
C1-4	3	4	1	2	2	1
C1-10	2	8	1	1	1	1
C2-1	1	3	2	2	1	1
C2-3	4	1	3	2	2	1
C2-4	1	2	1	1	5	1
C2-6	1	1	5	1	1	1
C2-7	1	1	5	2	2	1
C3-2	8	2	5	1	8	1

-	PTTh-S-RS					
Gr	**4.b**	**4.a**	**3.b**	**3.a**	**2.b**	**1**
C3-1	1	1	3	1	5	1
C2-5	5	2	1	2	6	1
C1-1	2	1	4	1	7	1
C4-3	5	1	2	5	4	1

-	PTTh-S-nonRS					
Gr	**4.b**	**4.a**	**3.b**	**3.a**	**2.b**	**1**
C4-2	5	1	2	5	2	1
C3-3	1	1	5	6	1	1

Annexe I

Transcription d'un extrait de vidéo des élèves de la classe C-nonS-nonRS. Leurs réponses aux dernières questions de la séquence

I.1 La transcription

1. 01 :03 :01,888 → 01 :03 :05,228 : A : En fait, il faut construire le… produit de ça.
2. 01 :03 :05,728 → 01 :03 :10,566 : A : En multipliant l'un et en ajoutant l'autre (rires).
3. 01 :03 :15,629 → 01 :03 :19,040 : B : En fait, c'est simple. Ah, mais je sais, j'ai trouvé. (Ils lissent et relisent la question, puis ils reviennent en arrière pour regarder leur réponse à la question précédente).
4. 01 :03 :22,072 → 01 :03 :25,226 : C : Attendez, dans quel sens déjà on donne les […]
5. 01 :03 :41,058 → 01 :03 :47,456 : B : On représente sur le graphique, alors… Il faut construire la représentation, tu vois ?
6. 01 :03 :49,440 → 01 :03 :51,232 : A : (C fait une construction où le produit ne correspond pas au produit de modules car la longueur est trop courte. La position n'est pas correcte non plus car la droite où le produit a été placé ne correspond pas à une addition des angles des facteurs. Cette droite correspond à celle qui a été placé par B et que nous décrivons par la suite.) Mais c'est tout petit !
7. 01 :03 :57,838 → 01 :03 :59,850 : B : Déjà voilà, c'est ça (B trace une droite qui correspond à une élargissement dans le sens négatif du vecteur OA. Cette droite correspond exactement à la droite portant le produit dans la représentation géométrique donnée dans la question *4.a* ; En même temps, C réécrit en langage algébrique les propriétés de la multiplication de nombres complexes : somme d'angles et produit de modules. Puis tous les autres vont tracer la même droite que B).
8. 01 :04 :06,762 → 01 :04 :54,101 : P : (L'enseignante fait une remarque à toute la classe car plusieurs groupes étaient restés très longtemps bloqués dans la dernière petite question de la question 4.a.) Vous m'écoutez deux secondes ? Quand vous êtes à la page huit, quand on vous pose la question d'établir des liens entre les éléments pour expliquer la représentation géométrique du produit de deux nombres complexes, on vous demande de trouver la relation entre les normes des facteurs et la norme du produit. Et une relation, donc une relation éventuellement entre les angles des facteurs et l'angle du produit. Et c'est tout. On ne vous demande pas par exemple des choses entre les normes et les angles. On vous demande juste les normes, entre elles, entre les normes des facteurs et les normes du produit, et entre les angles des facteurs et l'angle du produit. Et après c'est tout.
9. 01 :05 :07,520 → 01 :05 :13,834 : P : (Elle se promène un peu dans la salle puis elle rajoute :) Ne cherchez pas dans vos cours précédents, hein ? Parce que justement, on n'a pas fait le cours dessus.

10. 01 :06 :26,422 → 01 :06 :28,266 : B : (Le groupe reprend son travail.)[…] Attends, je suis encore là bas.
11. 01 :06 :28,772 → 01 :06 :29,750 : C : Parallèles…
12. 01 :06 :38,604 → 01 :06 :40,896 : C : On a des parallèles ici.
13. 01 :06 :45,753 → 01 :06 :49,130 : A : Il faut faire la parallèle ici, non ?
14. 01 :06 :54,628 → 01 :06 :57,526 : C : Je montre la parallèle, là, non ?
15. 01 :06 :57,776 → 01 :07 :00,309 : D : C'est la parallèle. Sinon on ne pourra pas utiliser […]
16. 01 :07 :03,597 → 01 :07 :07,989 : D : En traçant la droite, et en traçant la parallèle ici… (D signale dans sa feuille, avec une équerre, deux droites parallèles : l'une d'entre elles corresponde à la droite passant par les points U et A. Sa parallèle passe par le point B et coupe OA permettant, de cette façon, de trouver "le produit" cherché).
17. 01 :07 :09,516 → 01 :07 :11,189 : B : Ah, oui ! […]
18. 01 :07 :28,192 → 01 :07 :35,082 : D : Ça me parait bien petit, non ? (Il signale la construction faite par A) Si tu multiplies… si tu multiplies ça fera bien plus grand, non ? […]
19. 01 :07 :40,504 → 01 :07 :42,784 : B : Mais on n'a pas de chiffre.
20. 01 :07 :54,370 → 01 :07 :58,073 : B : Il fallait le placer où, le point ? A : Non, ça va, c'est pas grave !
21. 01 :07 :58,323 → 01 :08 :01,386 : B : Vous ne savez pas s'il faut construire un point ?
22. 01 :08 :03,364 → 01 :08 :05,461 : A : J'ai construit B ici.
23. 01 :08 :05,711 → 01 :08 :09,770 : D : J'ai mesuré ici, j'ai mesuré là… (Il montre les modules)
24. 01 :08 :10,102 → 01 :08 :13,520 : C : Oui, mais tout à l'heure, dans l'autre schéma, le produit des deux, ça faisait pareil.
25. 01 :08 :14,808 → 01 :08 :17,109 : B : Attendez, je n'ai pas compris.
26. 01 :08 :19,178 → 01 :08 :23,893 : D : J'ai mesuré ceci, j'ai mesuré celui-là, j'ai fait le produit des deux.
27. 01 :08 :46,317 → 01 :08 :49,856 : A : Il a oublié de mettre un point D. Tu mets un point D sur la droite.
28. 01 :08 :50,410 → 01 :08 :51,413 : C : N'importe où ?
29. 01 :08 :51,852 → 01 :08 :58,133 : A : Et tu traces ça, et après tu traces, hop… parallèle là, comme ça.

30. 01 :09 :11,317 → 01 :09 :15,029 : B : 3, 1 fois 4 ça fait 12, 4, non ? (B prend la calculatrice et vérifie son calcul).
31. 01 :09 :23,392 → 01 :09 :26,814 : A : Vérifie ! (rires) […]
32. 01 :09 :31,852 → 01 :09 :38,432 : B : Mais si, parce que la relation de tout à l'heure, tu utilises la relation de tout à l'heure, et les normes, c'est des distances.
33. 01 :10 :00,545 → 01 :10 :10,048 : B : Premièrement j'avais mis la relation entre ça et ça, du coup quand tu remplaces… on l'appelle comment, le point ?
34. 01 :10 :11,928 → 01 :10 :13,994 : B : Mais ça parait tout petit ! (En observant le produit placé par A et C).
35. 01 :10 :17,602 → 01 :10 :17,744 : B : C'est de la multiplication, ça doit être largement […]
36. 01 :10 :27,968 → 01 :10 :30,616 : B : Mais… pour vous c'est petit !
37. 01 :10 :30,866 → 01 :10 :35,882 : A : Mais oui, mais je l'ai mis au pif. Je ne me suis pas cassée la tête à…
38. 01 :10 :40,536 → 01 :10 :45,930 : B : Mais tu ne mets pas au pif puisque tu as les normes. Du coup tu as les longueurs.
39. 01 :10 :53,104 → 01 :10 :56,469 : C : Est-ce que vous êtes sûrs que là… ?
40. 01 :10 :59,989 → 01 :11 :05,706 : B : Ben, oui. Parce que OA c'est positif et OB c'est négatif, donc le produit des deux c'est négatif.
41. 01 :11 :19,021 → 01 :11 :24,608 : B : Tu as trouvé 12, 1 ? Non, c'est…
42. 01 :11 :26,400 → 01 :11 :29,770 : B : Non c'est 12, 4 […]
43. 01 :11 :31,276 → 01 :11 :37,962 : B : Voilà, et après ça fait… On l'a laissé comment ? On l'appelle… ?
44. 01 :11 :38,112 → 01 :11 :47,946 : C : Ah, les normes, on fait à partir de là. On fait à partir de 0… ?
45. 01 :12 :00,886 → 01 :12 :02,666 : A : Oui, 3, 1 fois 4.
46. 01 :12 :11,193 → 01 :12 :27,565 : A : Euh, j'ai une question : il faut bien placer un autre lettre ? Voire l'utiliser pour l'expliquer… Placer une lettre D parce qu'après on va dire par angles opposées…
47. 01 :12 :27,815 → 01 :12 :29,305 : B : Mais non, parce que là…
48. 01 :12 :29,555 → 01 :12 :33,055 : P : Pourquoi faire une construction très compliquée ? Il faut juste appliquer… ce qui permet d'établir…

49. 01 :12 :39,488 → 01 :12 :52,821 : B : Là, tu as l'angle AO… je ne sais pas quoi, l'angle AOC. Tout ça, ça correspond à l'angle AOD.

50. 01 :13 :01,120 → 01 :13 :03,120 : A : Si tu dis que ça c'est AOD, il faut rajouter un point là quelque part…

51. 01 :13 :03,145 → 01 :13 :06,345 : D : Il manque le troisième point, c'est quoi ça (D montre la position du point encore une fois avec son équerre. Puis, du silence et des réflexions non audibles. Ils observent tous leur construction, ils regardent encore une fois la configuration précédente).

52. 01 :14 :32,822 → 01 :14 :39,616 : B : Moi ce qui me perturbe, c'est que là, en fait (elle montre les points dans la configuration précédente), on a trois points, pour en former un, et là on n'en a que deux pour en former un.

53. 01 :14 :50,060 → 01 :14 :53,034 : A : Moi, je trouve que ça tombe sur le point U.

54. 01 :14 :53,284 → 01 :14 :54,030 : E : Oui, c'est le point U.

55. 01 :14 :56,938 → 01 :14 :58,688 : A : Ça s'appelle le point U ?

56. 01 :15 :01,260 → 01 :15 :03,744 : B : Ah, c'est un point ! C'est un point ! Ah, d'accord.

57. 01 :15 :10,372 → 01 :15 :13,621 : P : Ça, c'est pas un point, c'est le vecteur…

58. 01 :15 :25,714 → 01 :15 :32,010 : P : Vous avez juste à appliquer ce que vous avez remarqué particulièrement… au niveau de l'angle je ne comprends pas ce que vous faites ici… (Elle leur montre les angles qu'il faudra normalement additionner et elle signale que leur somme ne pourrait peut-être pas être placé là où ils l'avait imaginée).

59. 01 :16 :14,815 → 01 :16 :18,958 : D : Il faut s'aider des angles afin de trouver là où il fallait *volter* la droite.

60. 01 :16 :19,474 → 01 :16 :24,108 : B : Excuse… est-ce qu'on peut m'expliquer encore ?

61. 01 :16 :25,913 → 01 :16 :27,710 : D : En fait, on repart à zéro !

62. 01 :16 :38,656 → 01 :16 :45,989 : D : Madame Rémy nous a conseillé de construire la droite, z'', avec l'histoire des angles.

63. 01 :16 :53,624 → 01 :16 :55,858 : E : tu as un rapporteur ? (A ce moment ils se concentrent en mesurer les angles (au rapporteur) et les modules (à la règle graduée). Ils effacent leur construction avec les parallèles et ils trouvent, après beaucoup de réflexion et des calculs, la position de la droite où il faudra finalement placer le produit résultant de l'addition d'angles et du produit de modules en centimètres. Même en connaissant la mesure résultant de la somme des angles des facteurs ils n'arrivent pas facilement à placer le produit).

64. 01 :21 :01,550 → 01 :21 :04,496 : D : Ça me parait vraiment étrange que l'on peut pas arriver à la propriété de Thalès.

65. 01 :21 :05,403 → 01 :21 :08,668 : B : C'est pas forcement que j'ai utilisé Thalès à chaque annexe.

66. 01 :21 :10,171 → 01 :21 :13,376 : D : Mais justement on doit vérifier les mêmes propriétés que… là bas

67. 01 :21 :15,175 → 01 :21 :25,038 : B : non mais c'est que tu évolues. Au début on disait Thalès, après on a parlé de normes, après on a parlé de… pour arriver aux nombres complexes […]

68. 01 :22 :21,699 → 01 :22 :25,101 : B : Décrire votre construction… c'est quoi ça. (Ils passent à la dernière question).

69. 01 :22 :28,573 → 01 :22 :31,069 : B : Alors, euh… alors on…

70. 01 :22 :32,347 → 01 :22 :37,417 : C : Elle dit, euh… elle lie la multiplication et l'addition ?

71. 01 :22 :39,327 → 01 :22 :41,147 : B : L'addition est liée à…

72. 01 :22 :41,897 → 01 :22 :43,729 : A : Non, là, quelle signification.

73. 01 :22 :44,574 → 01 :22 :46,789 : C : La multiplication mélange l'addition et puis…

74. 01 :22 :49,734 → 01 :22 :50,477 : B : Maintenant il faut parler des angles…

75. 01 :22 :50,477 → 01 :22 :53,933 : C : Mais justement ils s'additionnent (A ce moment de la discussion l'enseignante leur fait remarquer que pour mesurer le produit dans la question précédente ils n'ont pas pris en compte la mesure de l'unité. Ils reprennent donc leur travail précédent et ils se retrouvent avec la difficulté de ne pas savoir convertir leur résultat donné en centimètres à un résultat mesuré en unités. Nous faisons la remarque que cette difficulté a aussi été retrouvé dans d'autres classes ayant fait l'expérience. Après plusieurs échanges à l'intérieur du groupe, où même la possibilité de vérifier le produit à l'aide des projetés orthogonaux, ils vont placer leur produit d'une façon approximative puis ils vont retourner à la dernière question de la séquence. Quelques minutes plus tard commencera la pause déjeuner. L'après midi commence par un bilan fait par l'enseignant en reprenant le travail sur les trois premier annexes puis les groupes ont encore quelques minutes pour finir leur construction et donner si possible une réponse à la dernière question. Notre groupe reprend donc son travail mais ils retournent encore à la construction du produit de deux nombres complexes. Une fois dans la dernière question ils se questionnent par rapport à ce qu'on fait quand on multiplie deux nombres complexes).

76. 01 :43 :40,583 → 01 :43 :49,172 : B : Hmm… Quand on multiplie le vecteur on tourne… on multiplie leurs normes et on additionne leurs angles.
77. 01 :44 :10,510 → 01 :44 :14,558 : B : Mais… Quelle signification… signification…
78. 01 :44 :14,558 → 01 :44 :20,832 : D : … On a travaillé sur… Regarde, Descartes qui a construit une représentation géométrique de la multiplication… (D retourne et regarde encore une fois chaque page de la séquence).
79. 01 :44 :20,832 → 01 :44 :25,959 : B : Mais quelle signification, je ne comprends pas quelle signification.
80. 01 :44 :25,959 → 01 :44 :29,125 : B : Quelle signification géométrique…
81. 01 :44 :29,125 → 01 :44 :42,940 : B : C'est une définition en fait, signification géométrique, définition géométrique…
82. 01 :44 :46,700 → 01 :44 :52,974 : D : (Continue à regarder les pages de la séquence) … Multiplication de normes et addition de, des angles… (Tous écrivent et la séance termine).

Annexe J

Séquence du groupe dont les interactions de ses intégrants ont été transcrites

C2-4

α

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Travail avec annexe 1

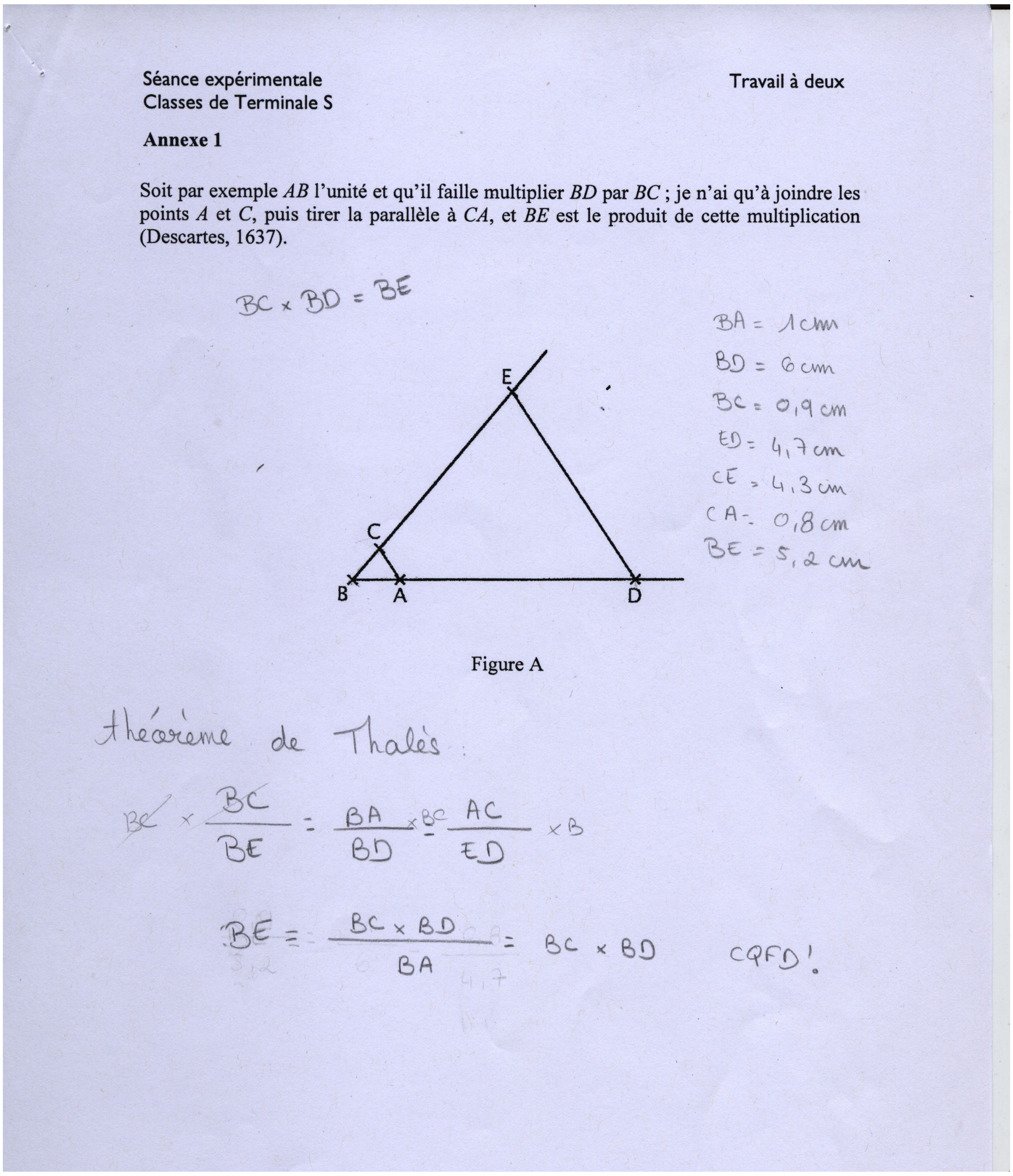
La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication. Nous vous présentons aussi son texte historique la décrivant.

I. Lire le texte de Descartes, puis observer la configuration « Figure A » pour répondre à la question suivante :

a. Nous proposons *AB = 1 cm. BE,* est-il bien le produit annoncé par Descartes ? Qu'en pensez-vous ?

Par le théorème de Thalès, on obtient bien le produit annoncé par Descartes. Il a dû utiliser ce théorème.

Figure J.1 – C2-4-1a



Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Annexe 1

Soit par exemple *AB* l'unité et qu'il faille multiplier *BD* par *BC* ; je n'ai qu'à joindre les points *A* et *C*, puis tirer la parallèle à *CA*, et *BE* est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).

$BC \times BD = BE$

BA = 1cm
BD = 6cm
BC = 0,9 cm
ED = 4,7 cm
CE = 4,3 cm
CA = 0,8 cm
BE = 5,2 cm

Figure A

théorème de Thalès :

$$\cancel{BE} \times \frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} \times BC = \frac{AC}{ED} \times B$$

$$BE = \frac{BC \times BD}{BA} = BC \times BD$$ CQFD !

Figure J.2 – C2-4-1b

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Travail avec annexe 2

II. Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

a. Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :
- Sachant que $BA = 1cm$ placer D entre B et A.
- Construire E pour que BE donne le produit de la multiplication de BD par BC.

b. Décrire votre construction et expliquer pour quoi elle peut être considérée comme analogue à la multiplication de Descartes.

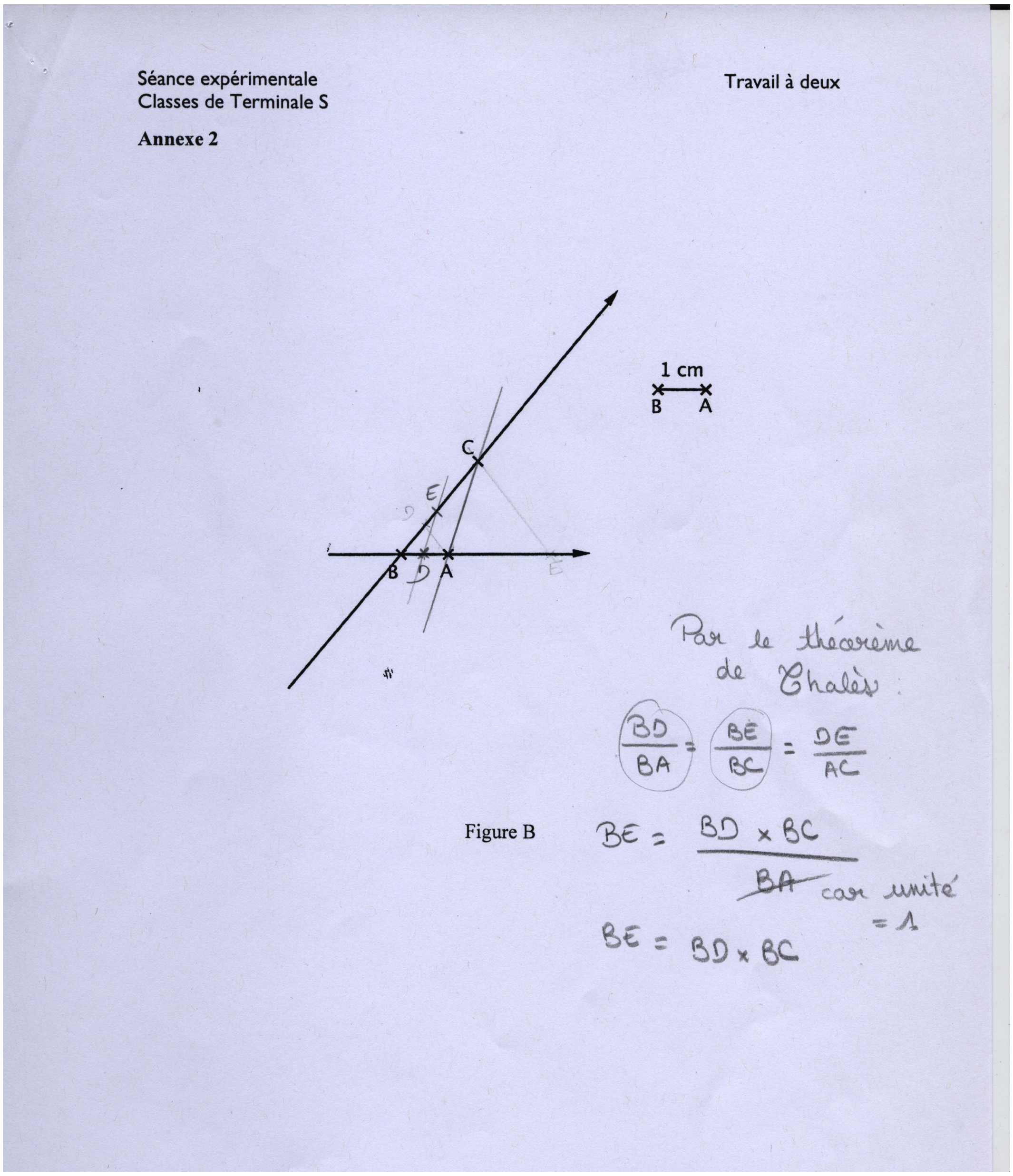
→ * placer le pts n'importe où sur la droite (BA) entre B et A

* tracer [AC]

* tirer la parallèle de [AC] pour obtenir [ED]

→ Même principe que dans l'Annexe 1.

Figure J.3 – C2-4-2a



Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Annexe 2

Figure B

Par le théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

$$BE = \frac{BD \times BC}{\cancel{BA}} \text{ car unité } = 1$$

$$BE = BD \times BC$$

Figure J.4 – C2-4-2b

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Travail avec annexe 3

III. Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point *A* d'abscisse +1 et du côté négatif le point *D* d'abscisse -2.

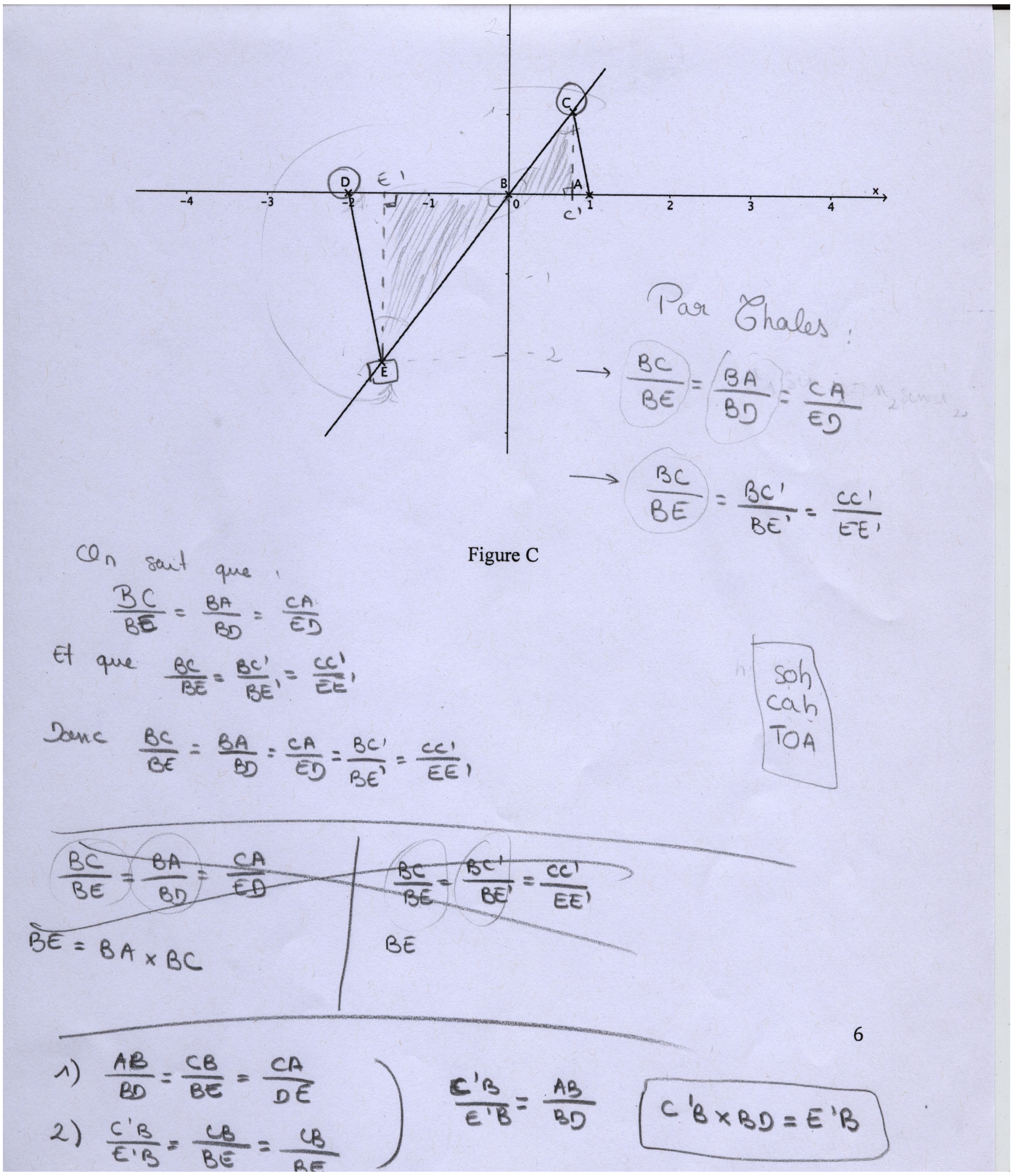
a. Projeter orthogonalement les points C et E sur l'axe des abscisses. Pouvez-vous justifier que l'abscisse du point E est le produit des abscisses des points D et C ? Comment ?

Par l relation de Chales :
des triangles initials et des triangles obtenus par projection.

b. Si de manière plus générale, l'abscisse du point *C* est $x_C > 0$ et l'abscisse du point *D* est $x_D < 0$, décrire la représentation géométrique du point *E* sur *(BC)* d'abscisse $x_E = x_C x_D$.

→ On sait que $x_C > 0$ et $x_D < 0$ donc le produit $x_C x_D < 0$. Donc $x_E < 0$.
→ On place le pts E sur l'axe de x entre l'origine et D. On trace orthorgonalemt le pts E sur la droite (BC).

Figure J.5 – C2-4-3a



Par Thalès :

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{ED}$$

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BC'}{BE'} = \frac{CC'}{EE'}$$

Figure C

On sait que :

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{ED}$$

Et que $\frac{BC}{BE} = \frac{BC'}{BE'} = \frac{CC'}{EE'}$

Donc $\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{ED} = \frac{BC'}{BE'} = \frac{CC'}{EE'}$

soh
cah
TOA

$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{ED}$ | $\frac{BC}{BE} = \frac{BC'}{BE'} = \frac{CC'}{EE'}$

$BE = BA \times BC$ | BE

6

1) $\frac{AB}{BD} = \frac{CB}{BE} = \frac{CA}{DE}$

2) $\frac{C'B}{E'B} = \frac{CB}{BE} = \frac{CB}{BE}$

$\frac{C'B}{E'B} = \frac{AB}{BD}$ $\boxed{C'B \times BD = E'B}$

Figure J.6 – C2-4-3b

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Travail avec annexe 4

IV. Nous allons étudier une nouvelle configuration, similaire à la configuration précédente, mais celle-ci est située dans le plan complexe avec certains éléments complémentaires.

a. Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$, un repère orthonormal direct du plan appelé plan complexe. Nous vous rappelons qu'un nombre complexe est appelé affixe d'un point M et d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$. Utiliser les informations données sur la configuration « Figure D » pour répondre aux questions suivantes :

- Pouvez-vous affirmer que dans cette représentation géométrique, la multiplication de z et z' donne toujours le produit z'' (affixe du point E et du vecteur $\overrightarrow{BE}$) ? Expliquez votre réponse.

Figure J.7 – C2-4-4a

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

- Dans votre réponse à la question précédente, avez-vous établi des liens entre $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{BD}\|$ et $\|\overrightarrow{BE}\|$? Lesquels ? Et entre ÂOC, ÂOD (les angles associés aux facteurs) et ÂOE (l'angle associé au produit) ? Si vous ne les avez pas encore considérés, quels liens établiriez-vous entre ces éléments pour expliquer la représentation géométrique du produit de deux nombres complexes ?

$$\boxed{\|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{BE}\|}$$

$$\boxed{A\hat{O}E = A\hat{O}C + A\hat{O}D}$$

⟹ les normes se multiplient
et les angles s'ajoutent.

Figure J.8 – C2-4-4b

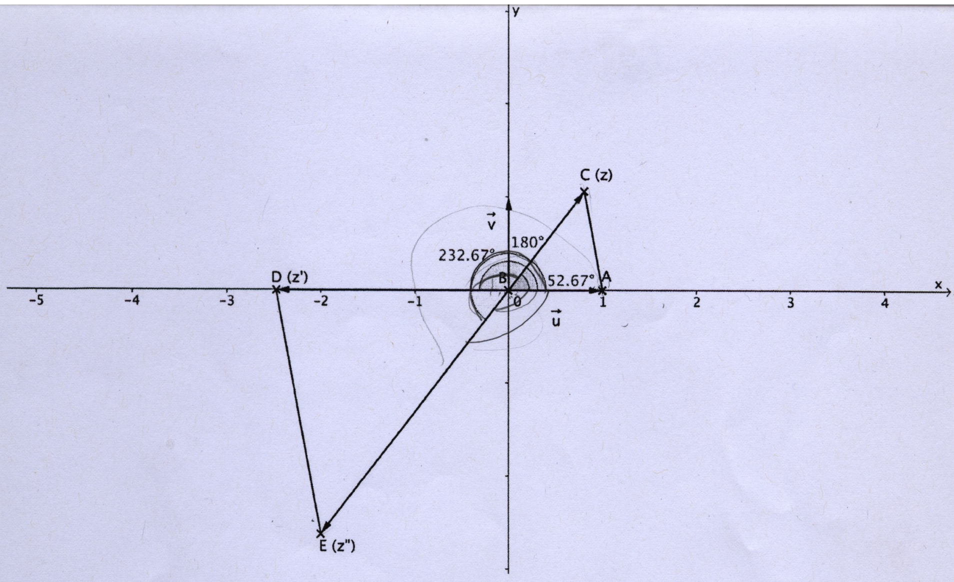


Figure D

→ Par le théorème de Thalès :

$$\frac{BA}{BD(z')} = \frac{BC(z)}{BE(z'')} = \frac{AC(z)}{D(z')E(z'')}$$

$$\cancel{BE}(z'') = \cancel{BC}(z) \times \cancel{BD}(z')$$

$$z'' = z \times z'$$

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$$

$$\frac{1}{BD} = \frac{BC}{BE}$$

$$BE = BC \times DD$$

$\to \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{BE}\|$

$\to \widehat{AOE} = \widehat{AOC} + \widehat{AOD}$

et $\widehat{AOC} = \widehat{DOE}$

par la propriété des angles opposés

9

Figure J.9 – C2-4-4c

Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

Travail avec annexe 5

b. Observez les représentations géométriques de deux nombres complexes dans la configuration « Figure E ».

- En prenant en compte tes réponses dans les questions précédentes construire la représentation géométrique du produit de z et z'.

- Décrire votre construction.

- on a déduit que :
$\|\vec{OB}\| \times \|\vec{OA}\| = \|\vec{OC}\|$
de là, on trouve une norme de 12,4 cm pour le vecteur $\vec{OC}$.

- On additionne les angles, trouve une valeur de 155°.
A partir de cette inclinaison, on trace un segment de 12,4 cm à partir du point d'origine.

- ~~Quelles propriétés de la multiplication est-il possible de vérifier grâce à la représentation géométrique des deux nombres complexes ?~~

Figure J.10 – C2-4-5a

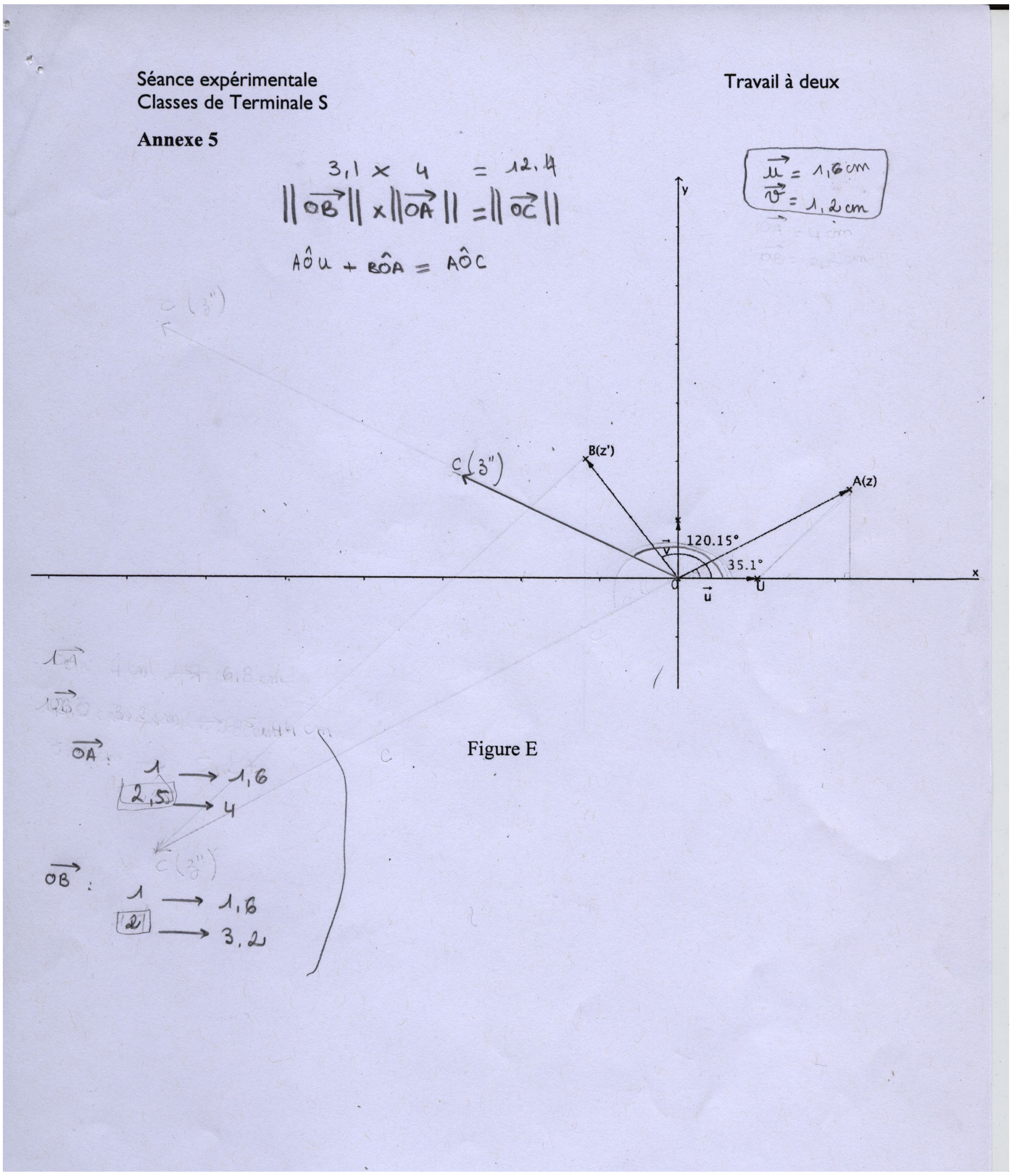
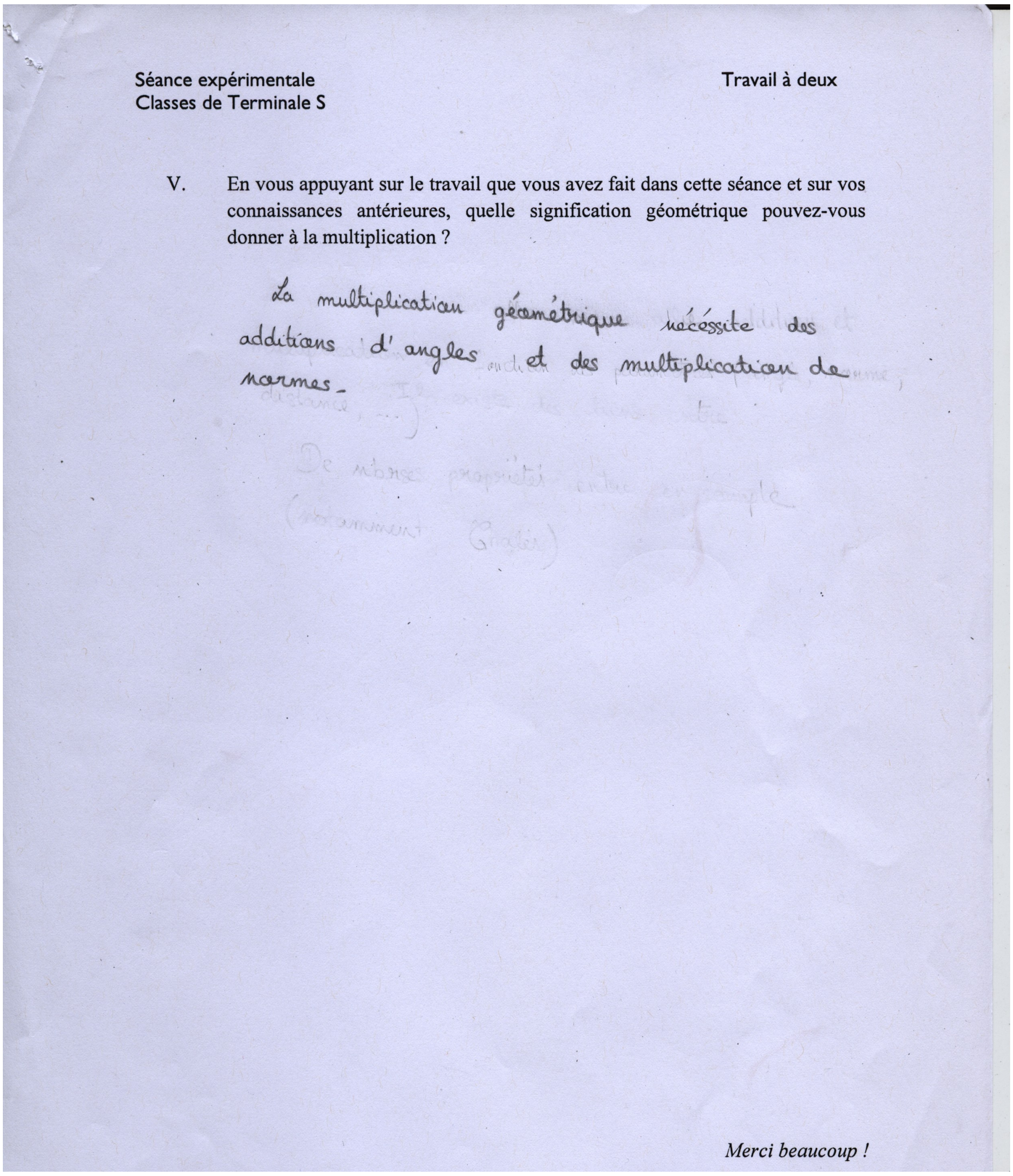


Figure J.11 – C2-4-5b



Séance expérimentale
Classes de Terminale S

Travail à deux

V. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle signification géométrique pouvez-vous donner à la multiplication ?

La multiplication géométrique nécéssite des additions d'angles et des multiplication de normes.

Merci beaucoup !

Figure J.12 – C2-4-DR

Annexe K

Réponses à la première question de la séquence

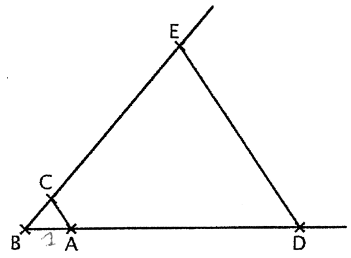


Figure A

→ prouver que BA = BC .

~~D'après Thalès, BA×BD = BC × BE,~~

D'après Thales, $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{CA}{ED}$

$\Leftrightarrow BA \times BE = BD \times BC$

$\Leftrightarrow BE = BD \times BC$.

Figure K.1 – A

D'après Thales, $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{CA}{ED}$ dans le triangle BED

car $(CA)//(ED)$, $C \in [BE]$ et $A \in [BD]$ et $BA = 1$.

Donc $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{CA}{ED}$

$\Leftrightarrow BA \times BE = BD \times BC$

$\Leftrightarrow BE = BD \times BC$.

Donc BE est bien le produit annoncé par Descartes.

Descartes a utilisé le théorème de Thales.

Figure K.2 – A

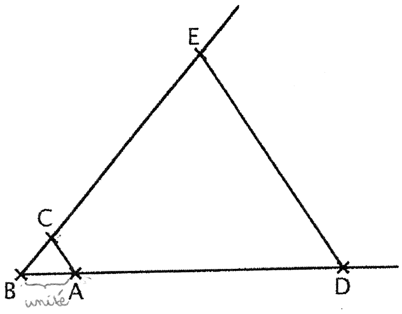


Figure A

Figure K.3 – E

On sait que :

$(CA) // (DE)$

Donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} \iff BC \times BD = BA \times BE.$$

Si $AB = 1$, alors $BC \times BD = BE$.

C'est bien le produit annoncé par Descartes.

Figure K.4 – E

a) - $BE = BD \times BC$?

Thalès :

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{CA}{ED}$$

$$\frac{1}{BD} = \frac{BC}{BE}$$

$\iff \underline{BE = BC \times BD.}$

Figure K.5 – G

Annexe L

Réponses à la deuxième question de la séquence

On place le point D sur [BA) tel que $\frac{BD}{BA} = k$.

On trace (CA), et on place E sur [BC) tel que $\frac{BE}{BC} = k$.

Pour cela, on trace la parallèle à (CA) passant par D, E est l'intersection de cette parallèle et de [BC).

On se place dans un triangle en choisissant la base [BA) = 1 cm,

on pose $\frac{BD}{BA} = k$

Ici, $0 < k < 1$.

Or, dans l'exemple précédent, $\frac{BD}{BA} = k'$ et $k' > 1$.

On a donc ici un cas particulier de la multiplication de Descartes car $k \neq k'$ mais $BD \times BC = BA \times BE$ dans les deux cas.

Figure L.1 – A

Annexe n°2

b. On a deux droites sécantes (BA) et (BC). le segment sécant à (BC) qui passe par le point C, coupe (BA) en A. la parallèle à [CA] passant par D, coupe (BC) en E.

On a $BE = BD \times BC$. On a pris $BD = 0{,}6$ cm. et $BC = 2{,}5$. Donc $0{,}6 \times 2{,}5 = 1{,}5$.

Graphiquement, on trouve encore

$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{CA}{ED}$ Soit $BE = \frac{BD \times BC}{BA} = \frac{BC \times BC}{1} = BD \times BC$

Figure L.2 – E

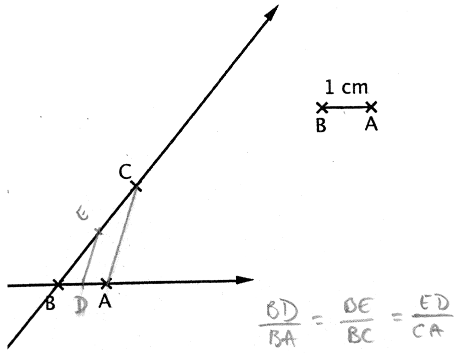
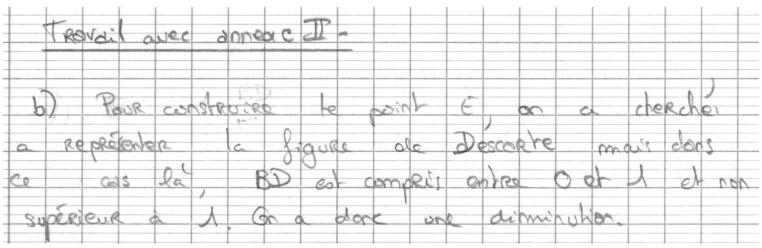


Figure L.3 – G1



Travail avec annexe II -

b) Pour construire le point E, on a cherché à représenter la figure de Descarte mais dans ce cas là, BD est compris entre 0 et 1 et non supérieur à 1. On a donc une diminution.

Figure L.4 – G2